Berner Fachhochschule
Technik und Informatik TI
Fachbereich Elektro- und Kommunikationstechnik EKT

Formelsammlung
Nachrichtentechnik

2012 F. Dellsperger

1 Symbole und Einheiten

A_{ij}		Kettenparameter	
B	S	Suszeptanz	
C	F	Kapazität	
C'	F/m	Kapazitätsbelag	
c_o	m/s	Ausbreitungsgeschwindigkeit im freien Raum	$2.997925 \cdot 10^8$ m/s
E	V/m	Elektrische Feldstärke (Vektor)	
f	Hz	Frequenz	
G	S	Konduktanz, Leitwert	
G'	S/m	Ableitungsbelag	
G_A		Verfügbare Leistungsverstärkung, Available Power Gain	
G_P		Betriebsleistungsverstärkung, Operating Power Gain	
G_T		Übertragungsleistungsverstärkung, Transducer Power Gain	
G_{TU}		Unilaterale Übertragungsleistungsverstärkung, Unilateral Transducer Power Gain	
h_{ij}		Hybridparameter	
I	A	Strom	
I_h	A	Strom der hinlaufenden Welle	
I_r	A	Strom der rücklaufenden (reflkektierten) Welle	
k		Stabilitätsfaktor (Linvill)	
L	H	Induktivität	
L'	H/m	Induktivitätsbelag	
ℓ	m	Leitungslänge	
ℓ_{el}	m	Elektrische Länge der Leitung	
ℓ_{mech}	m	Mechanische Länge der Leitung	
m		Anpassungsfaktor	
P	W	Leistung	
p_v	W/m	Verlustleistung pro Längeneinheit	
R	Ω	Widerstand	
R'	Ω/m	Widerstandsbelag	
RL	dB	Rückflussdämpfung, Return Loss	
r		Reflexionsfaktor	
r_G		Reflexionsfaktor des Generators	
r_L		Reflexionsfaktor der Last	
r_1		Reflexionsfaktor am Eingang der Leitung	
r_2		Reflexionsfaktor am Ausgang der Leitung	
S_{ij}		Streuparameter	
s		Welligkeitsfaktor, Stehwellenverhältnis	
t	s	Zeit	
t_e	m	Eindringtiefe des Stromes	
U	V	Spannung	
U_h	V	Spannung der hilaufenden Welle	
U_r	V	Spannung der rücklaufenden (reflektierten) Welle	
v_d	m / s	Ausbreitungsgeschwindigkeit in Leitung mit Dielektrikum	
v_r		Rekative Ausbreitungsgeschwindigkeit	
v_u		Spannungsverstärkung	
X	Ω	Reaktanz	

Y	S	Admittanz $Y=G+jB$	
y_{ij}		Admittanzparameter	
Z	Ω	Impedanz $Z=R+jX$	
z_{ij}		Impedanzparameter	
Z_1	Ω	Eingangsimpedanz	
Z_2	Ω	Ausgangs- oder Abschlussimpedanz	
Z_F	Ω	Feldwellenwiderstand	
Z_{Fo}	Ω	Feldwellenwiderstand im Vakuum	
Z_0	Ω	Systemimpedanz, Kennimpedanz, Wellenwiderstand der Leitung	
α	Np/m	Dämpfungsbelag einer Leitung $1\,Np=8.686\ dB$	
α_G	Np/m	Ableitungsdämpfung	
α_R	Np/m	Widerstandsdämpfung	
β	Rad/m	Phasenbelag einer Leitung	
γ		Übertragungsbelag, Ausbreitungsmass einer Leitung $=\alpha+j\beta$	
δ_G	Rad	Verlustwinkel des Dielektrikums	
ε_0	F/m	Dielektrizitätskonstante im freien Raum	$\frac{1}{36\pi}10^{-9}=8.854\cdot 10^{-12}F/m$
ε_r		Relative Dielektrizitätskonstante	
λ	m	Wellenlänge	
μ_0	H/m	Permeabilitätskonstante im freien Raum	$4\pi\cdot 10^{-7}H/m$
μ_r		Relative Permeabilitätskonstante	
ρ	$\Omega\cdot mm^2/m$	Spezifischer Widerstand	
φ	Rad	Winkel	
ω	Rad/s	Kreisfrequenz	

2 Grössen und Konstanten

2.1 Physikalische Konstanten

q	$1.6022\ 10^{-19}$	As	Elementarladung
k	$1.38054\ 10^{-23}$	WsK^{-1}	Boltzmannkonstante
h	$6.625\ 10^{-34}$	Ws^2	Planksches Wirkungsquantum
c	$2.997925\ 10^{8}$	ms^{-1}	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
m_{eo}	$9.1095\ 10^{-31}$	kg	Ruhemasse des Elektrons
m_p	$1.67265\ 10^{-27}$	kg	Ruhemasse des Protons
R	8.314	$N\ m\ mol^{-1}\ K^{-1}$	Gaskonstante
ε_o	$8.854\ 10^{-12} = \frac{1}{36\pi}10^{-9}$	$A\ s\ V^{-1}\ m^{-1}$	Dielektrizitätskonstante des Vakuum
μ_o	$1.2566\ 10^{-6} = 4\pi \cdot 10^{-7}$	$V\ s\ A^{-1}\ m^{-1}$	Induktionskonstante des Vakuum (Permeabilität)
g_n	9.80665	$m\ s^{-2}$	Fallbeschleunigung
Z_F	$376.7303 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$	Ω	Wellenwiderstand des Vakuum
0 K	-273.15	^oC	absoluter Nullpunkt der Temperatur
U_T	24.988 25.85	mV mV	Thermospannung bei T = 290 K (U_T = kT/e) Thermospannung bei T = 300 K

2.2 Grössen und Einheiten

Newton	1 N	=	$1\ kg\ m\ s^{-2}$
Joule	1 J	=	$1\ kg\ m^2\ s^{-2} = 1\ V\ A\ s = 1\ W\ s = 1\ N\ m$
Watt	1 W	=	$1\ kg\ m^2\ s^{-3} = 1\ V\ A = 1\ J\ s^{-1} = 1\ N\ m\ s^{-1}$
Volt	1 V	=	$1\ kg\ m^2\ A^{-1}\ s^{-3}$
Coulomb	1 C	=	1 A s
Farad	1 F	=	$1\ A\ s\ V^{-1}$
Henry	1 H	=	$1\ V\ s\ A^{-1}$

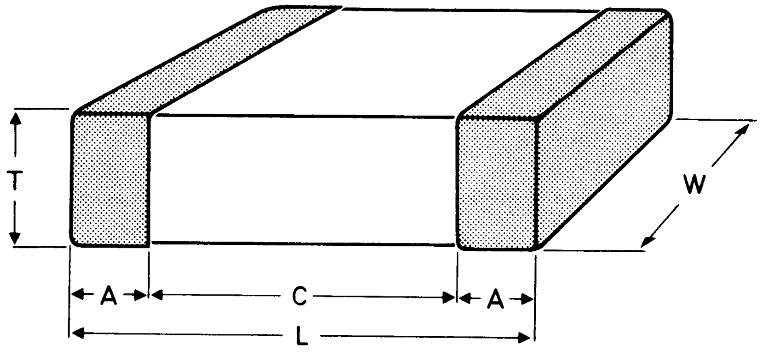
Weber	1 Wb	=	1 V s
Tesla	1 T	=	$1\ V\ s\ m^{-2}$
	1 kWh	=	3.6 MJ = 3.6 MW s
Gauss	1 G	=	10^{-4} T
Kalorie	1 cal	=	4.1868 J
Oersted	1 Oe	=	$79.5775\ A\ m^{-1}$
PS	1 PS	=	735.49875 W
Inch	1 in	=	25.4 mm
Foot	1 ft	=	12 in = 30.48 cm
mil	1 mil	=	25.4 μm

2.3 Spez. Widerstand ρ und Spez. Leitfähigkeit γ bei 20°C, Temp. Koeffizient α

Material	Spez. Widerstand ρ in 10^{-8} Ωm	Spez. Leitwert γ in $10^{6}\ S\ m^{-1}$	Temp. Koeffizient α in $10^{-4}\ K^{-1}$
Aluminium	2.78	36	39
Blei	20.8	4.8	42
Gold	2.22	45	40
Kupfer	1.72	58	38
Messing MS58	5.9	17	15
Messing MS63	7.1	14	15
Nickel	8.7	11.5	47
Platin	11.1	9	39
Silber	1.6	62.5	37.7
Zink	6.1	16.5	37
Zinn	12	8.3	42

3 Material

3.1 Chip-Abmessungen



Bezeichnung	L (mm)	W (mm)
0201	0.5	0.25
0402	1.0	0.5
0603	1.6	0.76
0805	2.0	1.25
1206	3.2	1.6
1210	3.2	2.5

3.2 Substratmaterialien

Handelsbe-zeichnung	Material	ε_r	tan δ 10 GHz	Formsta-bilität - o +	Bearbeit-barkeit - o +	Preis - o +
Luft (trocken)		1	≈0			
FR-4	Epoxy/Glas	4.7±0.3	0.025[1)]	+	+	- -
GT, GX	PR	2.5±0.05	0.0018	-	-	o
Rogers Duroid 5880	PR	2.2±0.02	0.0009	-	-	o
Rogers RO 4350B	CTW	3.66±0.05	0.0038	+	+	-
Rogers RO 3006	PC	6.15±0.15	0.0020	+	-	+
Rogers RO 3010	PC	10.20±0.3	0.0023	+	- -	+
Taconic TLC-32	PCW	3.2±0.05	0.003	o	-	-
Taconic TLE-95	PCW	2.95±0.05	0.0028	o	-	-
Taconic TLT-8	PW	2.55±0.05	0.0019	-	-	o
Taconic RF-35	PCW	3.5±0.05	0.0018	+	+	-
Arlon Epsilam 10	PC	10.2±0.25	0.002	+	- -	+
Alumina	Al_2O_3 99.5%	9.7	0.0003	+	- -	+
Beryllia	BeO 97%	6.9	0.0003	+	- -	+
Saphir		9.4/11.6	0.0001	+	- -	+
Glas		5	0.002	+	- -	+
Quarz		3.8	0.0001	+	- -	+ +
Dacron	Epoxy	3.2	0.015[2)]	-	o	-
Kapton	Polimid	3.5	0.01[2)]	-	o	-
Mylar	Polyester	3.3	0.01[2)]	-	o	-
Gallium Arsenid	GaAs	13.1	0.0016	+	- -	+ +
Germanium	Ge	16.0		+	- -	+ +
Silizium	Si	11.7	0.005	+	- -	+ +

1) 1 GHz
2) 1 MHz

P = PTFE resin
T = Thermoset resin
C = Ceramic filler
R = Random Glass weave
W = Woven Glass

Cu Clad	
oz/ft^2	um
0.500	17.5
1.000	35
2.000	70

Thickness			
mil	mm	mil	mm
4	0.102	45	1.143
5	0.127	50	1.270
6.6	0.168	60	1.524
10	0.254	62	1.575
15	0.381	75	1.905
19	0.483	93	2.362
20	0.508	100	2.540
25	0.635	125	3.175
30	0.762	187	4.750
31	0.787	250	6.350

Cu Surface Roughness:
ED 0.4 - 2.5 um; Rolled 0.3 - 1.4 um

4 Mathematik

4.1 Komplexe Zahlen

$$(+j)\cdot(+j) = -1$$

$$(-1)\cdot(+j) = -j$$

$$(-j)\cdot(+j) = +1$$

$$(-j)\cdot(-j) = -1$$

$$\frac{1}{j} = -j$$

$$\frac{1}{-j} = +j$$

$$j(-x) = -jx$$

Addition (Subtraktion): Komplexe Zahlen werden addiert (subtrahiert), indem man deren Real- und Imaginärteil für sich addiert (subtrahiert).

$$(R_1 + jX_1) + (R_2 + jX_2) = R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2)$$

$$(R_1 + jX_1) + (R_2 - jX_2) = R_1 + R_2 + j(X_1 - X_2)$$

$$(R_1 - jX_1) + (R_2 - jX_2) = R_1 + R_2 - j(X_1 + X_2)$$

Multiplikation (Division): Komplexe Zahlen werden multiplitziert (dividiert), indem man ihre Beträge multipliziert (dividiert) und die Winkel addiert (subtrahiert).

$$|Z_1|\angle\alpha \cdot |Z_2|\angle\beta = |Z_1|\cdot|Z_2|\angle(\alpha+\beta)$$

$$\frac{|Z_1|\angle\alpha}{|Z_2|\angle\beta} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}\angle(\alpha-\beta)$$

Potenzieren (Radizieren): Komplexe Zahlen werden mit n potenziert (radiziert), indem man den Betrag mit n potenziert (radiziert) und den Winkel mit n multipliziert (durch n dividiert).

$$(|Z|\angle\alpha)^n = |Z|^n\angle(n\cdot\alpha)$$

$$\sqrt[n]{|Z|\angle\alpha} = \sqrt[n]{|Z|}\angle\frac{\alpha}{n}$$

Umwandlungen rechtwinklig <---> polar:

$$|Z|\angle\varphi = R + jX \longrightarrow R = |Z|\cos\varphi \qquad X = |Z|\sin\varphi$$

$$R + jX = |Z|\angle\varphi \longrightarrow |Z| = \sqrt{R^2+X^2} \qquad \varphi = \arctan\frac{X}{R}$$

4.2 Trigonometrische Formeln

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$
$\mathrm{cosec}^2 x - \cot^2 x = 1$
$\sin x \cdot \mathrm{cosec}\, x = 1$
$\cos x \cdot \sec x = 1$
$\tan x \cdot \cot x = 1$

$\mathrm{cosec}\ x = \frac{1}{\sin x}$
$\sec\ x = \frac{1}{\cos x}$

Funktionswerte

Grad	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$1\frac{1}{6}\pi$	$1\frac{1}{4}\pi$	$1\frac{1}{3}\pi$	$1\frac{1}{2}\pi$	$1\frac{2}{3}\pi$	$1\frac{3}{4}\pi$	$1\frac{5}{6}\pi$	2π
sin =	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos =	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan =	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot =	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Beziehungen

$\sin(2\pi \cdot n + x) = \sin x$
$\cos(2\pi \cdot n + x) = \cos x$
$\tan(\pi \cdot n + x) = \tan x$
$\cot(\pi \cdot n + x) = \cot x$

$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$
$\tan(-x) = -\tan x$
$\cot(-x) = -\cot x$

	$\sin x =$	$\cos x =$	$\tan x =$	$\cot x =$
sin		$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$	$\pm\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$
		$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$		
		$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$		$\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}-1}$
		$1-2\sin^2\frac{x}{2}$		
cos	$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$	$\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\pm\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$
	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$			
	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$		$\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-1}$	
	$\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$			
	$\sqrt{\cos^2 x-\cos 2x}$			
	$\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$			
tan	$\pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$	$\frac{1}{\tan x}$
	$\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$	$\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$		$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
cot	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$	$\pm\frac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$	$\frac{1}{\cot x}$	$\frac{\cot^2\left(\frac{x}{2}\right)-1}{2\cot\frac{x}{2}}$
			$\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$	
sin, cos, tan, cot, sec, cosec	$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$	$\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$	$\frac{\sin x}{\cos x}$	$\frac{\cos x}{\sin x}$
	$\cos x\cdot\tan x$	$\frac{\sin x}{\tan x}$		
	$\frac{1}{\mathrm{cosec}\ x}$	$\frac{1}{\sec x}$		
e	$\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$	$\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$	$j\frac{e^{-jx}-e^{jx}}{e^{jx}+e^{-jx}}$	$j\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{e^{jx}-e^{-jx}}$

Additionstheoreme

$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 \pm \cos x_1 \cdot \sin x_2$
$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \mp \sin x_1 \cdot \sin x_2$
$\tan(x_1 \pm x_2) = \dfrac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1 \mp \tan x_1 \cdot \tan x_2}$
$\cot(x_1 \pm x_2) = \dfrac{\cot x_1 \cdot \cot x_2 \mp 1}{\cot x_2 \pm \cot x_1}$

Halbe Winkel

$\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$
$\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$
$\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$
$\cot\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \dfrac{\sin x}{1-\cos x} = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

Doppelte Winkel

$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$
$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$
$\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \dfrac{2}{\cot x - \tan x}$
$\cot(2x) = \dfrac{\cot^2 x - 1}{2\cot x} = \dfrac{\cot x - \tan x}{2}$

Dreifache Winkel

$\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$
$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$
$\tan(3x) = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$

n-fache Winkel

$\sin(nx) = \binom{n}{1}\sin x \cdot \cos^{n-1} x - \binom{n}{3}\sin^3 x \cdot \cos^{n-3} x + \binom{n}{5}\sin^5 x \cdot \cos^{n-5} x - .. + ...$
$\cos(nx) = \cos^n x - \binom{n}{2}\sin^2 x \cdot \cos^{n-2} x + \binom{n}{4}\sin^4 x \cdot \cos^{n-4} x - .. + ...$

Potenzen

$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right) = 1-\cos^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$
$\sin^3 x = \frac{1}{4}\left(3\sin x - \sin(3x)\right)$
$\sin^4 x = \frac{1}{8}\left(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3\right)$
$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left[1+\cos(2x)\right] = 1-\sin^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$
$\cos^3 x = \frac{1}{4}\left(3\cos x + \cos(3x)\right)$
$\cos^4 x = \frac{1}{8}\left(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3\right)$
$\cos^5 x = \frac{1}{16}\left(\cos(5x) + 5\cos(3x) + 10\cos(x)\right)$
$\cos^6 x = \frac{1}{32}\left[\cos(6x) + 6\cos(4x) + 15\cos(2x) + 10\right]$
$\cos^7 x = \frac{1}{64}\left[\cos(7x) + 7\cos(5x) + 21\cos(3x) + 35\cos(x)\right]$
$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$

Summen und Differenzen

$\sin x_1 + \sin x_2 = 2\sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$
$\sin x_1 - \sin x_2 = 2\cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$
$\sin(x_1+x_2) + \sin(x_1-x_2) = 2\sin x_1 \cdot \cos x_2$
$\sin(x_1+x_2) - \sin(x_1-x_2) = 2\cos x_1 \cdot \sin x_2$
$\cos x_1 + \cos x_2 = 2\cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$
$\cos x_1 - \cos x_2 = -2\sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$
$\cos(x_1+x_2) + \cos(x_1-x_2) = 2\cos x_1 \cdot \cos x_2$
$\cos(x_1+x_2) - \cos(x_1-x_2) = -2\sin x_1 \cdot \sin x_2$
$\tan x_1 \pm \tan x_2 = \frac{\sin(x_1 \pm x_2)}{\cos x_1 \cdot \cos x_2}$
$\cot x_1 \pm \cot x_2 = \frac{\sin(x_2 \pm x_1)}{\sin x_1 \cdot \sin x_2}$

Produkte

$\sin x_1 \cdot \sin x_2 = \frac{1}{2}\left(\cos(x_1 - x_2) - \cos(x_1 + x_2)\right)$
$\cos x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{1}{2}\left(\cos(x_1 - x_2) + \cos(x_1 + x_2)\right)$
$\sin x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{1}{2}\left(\sin(x_1 - x_2) + \sin(x_1 + x_2)\right) = \frac{1}{2}\left(-\sin(x_2 - x_1) + \sin(x_1 + x_2)\right)$
$\tan x_1 \cdot \tan x_2 = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{\cot x_1 + \cot x_2} = -\frac{\tan x_1 - \tan x_2}{\cot x_1 - \cot x_2}$
$\cot x_1 \cdot \cot x_2 = \frac{\cot x_1 + \cot x_2}{\tan x_1 + \tan x_2} = -\frac{\cot x_1 - \cot x_2}{\tan x_1 - \tan x_2}$
$\cot x_1 \cdot \tan x_2 = \frac{\cot x_1 + \tan x_2}{\tan x_1 + \cot x_2} = -\frac{\cot x_1 - \tan x_2}{\tan x_1 - \cot x_2}$

4.3 Arkusfunktionen

$\arcsin x =$	$\arccos x =$	$\arctan x =$	$\operatorname{arccot} x =$
$\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$	$\operatorname{arccot}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$	$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$	$\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$
$\arccos\sqrt{1-x^2}$	$\frac{\pi}{2} - \arcsin x$	$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x$	$\frac{\pi}{2} - \arctan x$
$\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\arcsin\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\begin{Bmatrix} \arctan(1/x) & x>0 \\ \arctan(1/x)+\pi & x<0 \end{Bmatrix}$
	$\arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
		$\operatorname{arccot}\frac{1}{x}$	$\arctan\frac{1}{x}$

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$	$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
$\arctan(-x) = -\arctan x$	$\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$
$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$	$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$

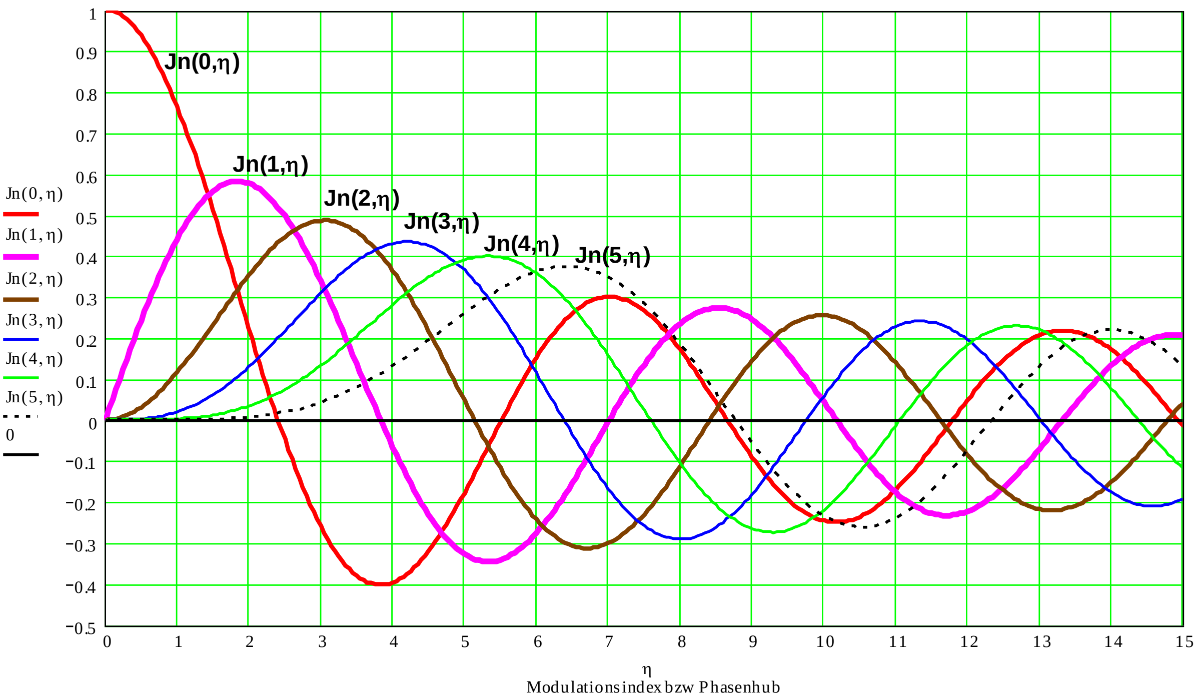
4.4 Hyperbel- und Areafunktionen

$\sinh x =$	$\cosh x =$	$\tanh x =$	$\coth x =$
$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$	$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$
$\pm\sqrt{\cosh^2 x - 1}$	$\sqrt{\sinh^2 x + 1}$	$\frac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}$	$\frac{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}{\sinh x}$
$\frac{\tanh x}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}$	$\pm\frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x}$	$\pm\frac{\cosh x}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}$
$\pm\frac{1}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$	$\pm\frac{\coth x}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$	$\frac{1}{\coth x}$	$\frac{1}{\tanh x}$
		$\frac{\sinh x}{\cosh x}$	$\frac{\cosh x}{\sinh x}$
$\operatorname{sech} x =$	$\operatorname{csch} x =$		
$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\cosh x}$	$\frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{\sinh x}$		

$\sinh jx = j\sin x$	$\sin jx = j\sinh x$
$\cosh jx = \cos x$	$\cos jx = \cosh x$
$\tanh jx = j\tan x$	$\tan jx = j\tanh x$
$\coth jx = -j\cot x$	$\cot jx = -j\coth x$

$\operatorname{ar}\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$	$\operatorname{ar}\cosh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$
$\operatorname{ar}\tanh x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ für $\lvert x\rvert < 1$	$\operatorname{ar}\operatorname{sech} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$
$\operatorname{ar}\coth x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ für $\lvert x\rvert > 1$	$\operatorname{ar}\operatorname{csch} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}\right)$

4.5 Besselfunktionen $J_n(\eta)$ erster Art der Ordnung n



Die Besselfunktion J_n bestimmt die Amplituden der beiden Seitenfrequenzen im Abstand von + $n \cdot f_m$ und $-n \cdot f_m$ vom Träger. J_0 führt zur Amplitude der Spektallinie auf f_c.

Nullstellen der Besselfunktionen

Jede Besselfunktion weist bei bestimmten Phasenhüben $\Delta\Phi_c$ (bzw. Modulationsindex η) Nullstellen auf. Diese können zum präzisen Bestimmen der Modulationsindexes genutzt werden.

Nullstellen der Besselfunktionen erster Art

Besselordnung	Nullstellen			
	1	2	3	4
0	2.405	5.520	8.654	11.792
1	3.832	7.016	10.173	13.324
2	5.136	8.417	11.620	14.796
3	6.380	9.761	13.015	

Besselordnung 0 = Träger
Besselordnung 1 = 1. Seitenband-Spektrallinie
Besselordnung 2 = 2. Seitenband-Spektrallinie
etc.

Das Argument der Funktion entspricht dem Modulationsindex $\eta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{H}{f_m}$

H = Frequenzhub

5 Fourieranalyse und Fouriertransformation

5.1 Fourieranalyse, Fourier-Reihe

Für periodische Funktionen:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\sin(n\omega_0 t)\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1\cos(\omega_0 t) + a_2\cos(2\omega_0 t) + ... + a_n\cos(n\omega_0 t) + b_1\sin(\omega_0 t) + b_2\sin(2\omega_0 t) + ... + b_n\sin(n\omega_0 t)$$

für $x(t)$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{(T)} x(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} x(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} x(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$

für $x(\omega t)$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{(2\pi)} x(\omega t)\,d(\omega t)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{(2\pi)} x(\omega t)\cos(n\omega_0 t)\,d(\omega t)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{(2\pi)} x(\omega t)\sin(n\omega_0 t)\,d(\omega t)$$

$(T),(2\pi)$: Integration über ein beliebiges Periodenintervall der Länge T, resp. 2π

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$A_0 = \frac{a_0}{2}$ DC – Anteil

$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ Amplitude der n. Harmonischen

$\varphi_n = \operatorname{atan}\frac{a_n}{b_n}$ Phase der n. Harmonischen ($+\pi$ für $b_n < 0$)

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\sin(n\omega_0 t)\right] = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

$$= A_0 + A_1\sin(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2\sin(2\omega_0 t + \varphi_2) + ... + A_n\sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

Gerade Funktionen $x(t) = x(-t)$ (symmetrisch zur y-Achse):

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{(T)} x(t)\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} x(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

$$b_n = 0$$

Ungerade Funktionen $x(t) = -x(t)$ (punktsymmetrisch zum Ursprung)

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} x(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$

Komplexe Fourier-Reihe (Exponentialform):

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

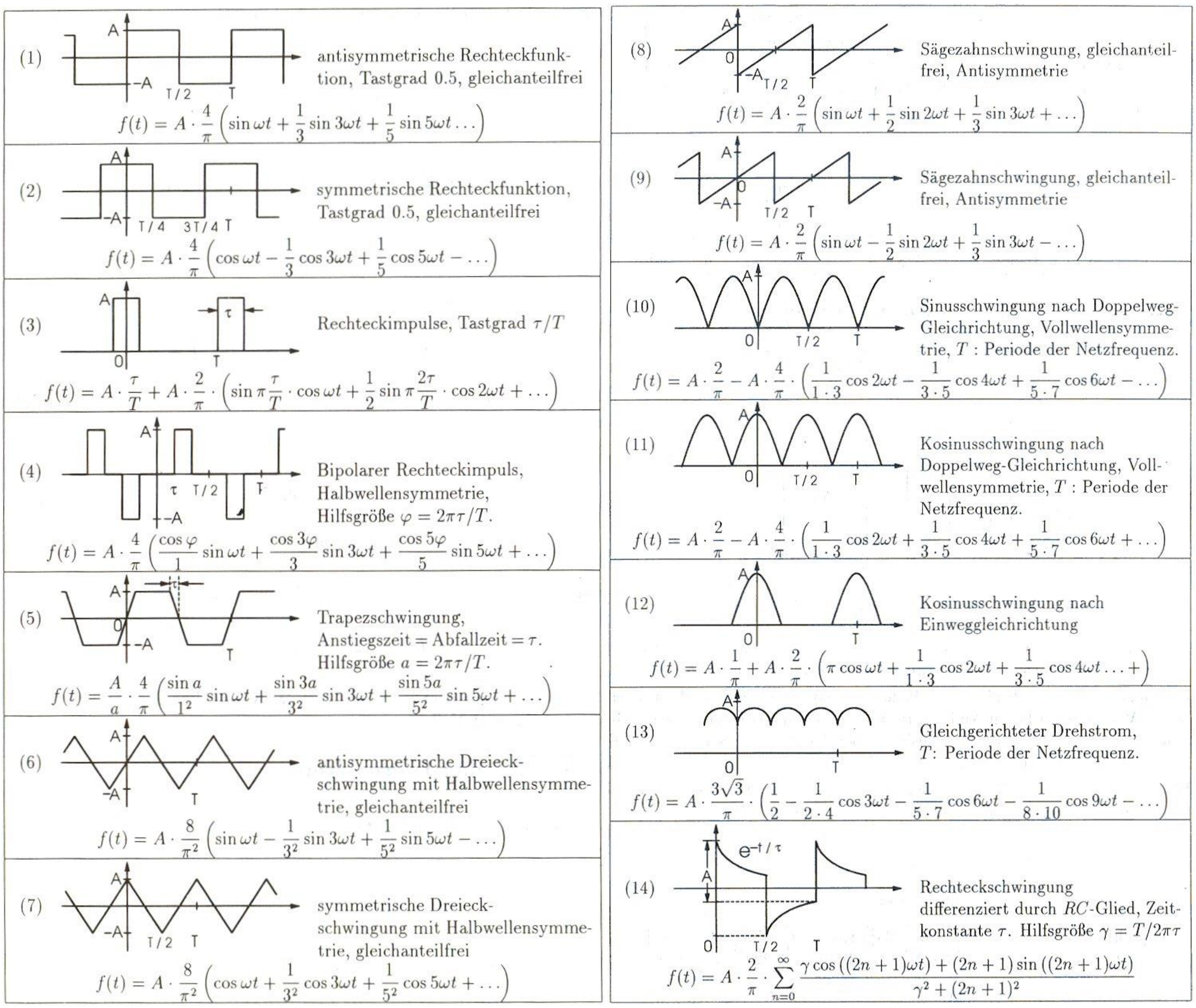
$$c_n = \frac{1}{T}\int_{(T)} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \qquad c_{-n} = c_n^*$$

$$A_0 = c_0 \qquad A_n = 2|c_n| \qquad \varphi_n = \angle c_n$$

Die komplexen Fourierkoeffizienten können auch aus den reellen Koeffizienten berechnet werden (und umgekehrt):

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - jb_n) & n > 0 \\ \frac{a_0}{2} & n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + jb_{-n}) & n < 0 \end{cases}$$

$$a_n = 2\mathrm{Re}(c_n) \quad n \ge 0$$
$$b_n = -2\mathrm{Im}(c_n) \quad n > 0$$



(1) antisymmetrische Rechteckfunktion, Tastgrad 0.5, gleichanteilfrei
$f(t) = A\cdot\frac{4}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t \ldots\right)$

(2) symmetrische Rechteckfunktion, Tastgrad 0.5, gleichanteilfrei
$f(t) = A\cdot\frac{4}{\pi}\left(\cos\omega t - \frac{1}{3}\cos 3\omega t + \frac{1}{5}\cos 5\omega t - \ldots\right)$

(3) Rechteckimpulse, Tastgrad τ/T
$f(t) = A\cdot\frac{\tau}{T} + A\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\left(\sin\pi\frac{\tau}{T}\cdot\cos\omega t + \frac{1}{2}\sin\pi\frac{2\tau}{T}\cdot\cos 2\omega t + \ldots\right)$

(4) Bipolarer Rechteckimpuls, Halbwellensymmetrie, Hilfsgröße $\varphi = 2\pi\tau/T$.
$f(t) = A\cdot\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos\varphi}{1}\sin\omega t + \frac{\cos 3\varphi}{3}\sin 3\omega t + \frac{\cos 5\varphi}{5}\sin 5\omega t + \ldots\right)$

(5) Trapezschwingung, Anstiegszeit = Abfallzeit = τ. Hilfsgröße $a = 2\pi\tau/T$.
$f(t) = \frac{A}{a}\cdot\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin a}{1^2}\sin\omega t + \frac{\sin 3a}{3^2}\sin 3\omega t + \frac{\sin 5a}{5^2}\sin 5\omega t + \ldots\right)$

(6) antisymmetrische Dreieckschwingung mit Halbwellensymmetrie, gleichanteilfrei
$f(t) = A\cdot\frac{8}{\pi^2}\left(\sin\omega t - \frac{1}{3^2}\sin 3\omega t + \frac{1}{5^2}\sin 5\omega t - \ldots\right)$

(7) symmetrische Dreieckschwingung mit Halbwellensymmetrie, gleichanteilfrei
$f(t) = A\cdot\frac{8}{\pi^2}\left(\cos\omega t + \frac{1}{3^2}\cos 3\omega t + \frac{1}{5^2}\cos 5\omega t + \ldots\right)$

(8) Sägezahnschwingung, gleichanteilfrei, Antisymmetrie
$f(t) = A\cdot\frac{2}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \ldots\right)$

(9) Sägezahnschwingung, gleichanteilfrei, Antisymmetrie
$f(t) = A\cdot\frac{2}{\pi}\left(\sin\omega t - \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t - \ldots\right)$

(10) Sinusschwingung nach Doppelweg-Gleichrichtung, Vollwellensymmetrie, T : Periode der Netzfrequenz.
$f(t) = A\cdot\frac{2}{\pi} - A\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t - \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t - \ldots\right)$

(11) Kosinusschwingung nach Doppelweg-Gleichrichtung, Vollwellensymmetrie, T : Periode der Netzfrequenz.
$f(t) = A\cdot\frac{2}{\pi} - A\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t + \ldots\right)$

(12) Kosinusschwingung nach Einweggleichrichtung
$f(t) = A\cdot\frac{1}{\pi} + A\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\left(\pi\cos\omega t + \frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t \ldots +\right)$

(13) Gleichgerichteter Drehstrom, T: Periode der Netzfrequenz.
$f(t) = A\cdot\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 4}\cos 3\omega t - \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t - \frac{1}{8\cdot 10}\cos 9\omega t - \ldots\right)$

(14) Rechteckschwingung differenziert durch RC-Glied, Zeitkonstante τ. Hilfsgröße $\gamma = T/2\pi\tau$
$f(t) = A\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma\cos((2n+1)\omega t) + (2n+1)\sin((2n+1)\omega t)}{\gamma^2 + (2n+1)^2}$

Tabelle einiger Funktionen aus „Taschenbuch der Elektrotechnik, Kories/Schmidt-Walter“

5.2 Fourier-Transformation

Für **nicht** periodische Funktionen:

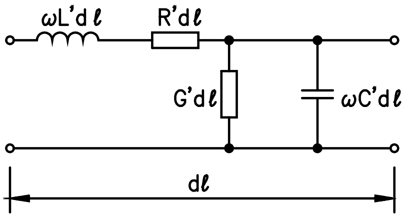
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$x(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f)$$

6 LEITUNGEN

6.1 Leitungskenngrössen



Induktionsbelag L' (H/m) $$L' = \frac{Z_o\sqrt{\varepsilon_r}}{c_o}$$

$c_o = 3*10^8$ m/s

Kapazitätsbelag C' (F/m) $$C' = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{c_o Z_o}$$

Übertragungsbelag

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \sqrt{Z'Y'}$$

Dämpfungsbelag α (Np/m) $$\alpha = \frac{R'}{2Z_o} + \frac{G'Z_o}{2}$$

$$1\text{Np} = 8.686\ \text{dB}$$

Phasenbelag β (Rad/Längeneinheit $$\beta = \omega\sqrt{L'C'} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$

Wellenwiderstand Z_o (Ω)

$$Z_o = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = R_L + jX_L = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}}$$

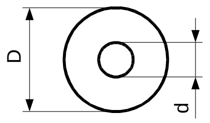
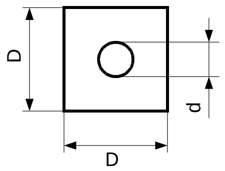
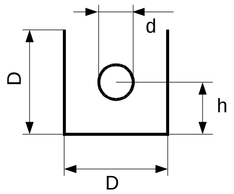
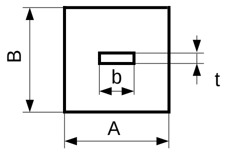
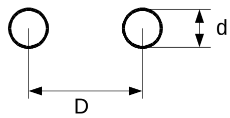
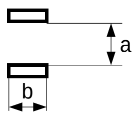
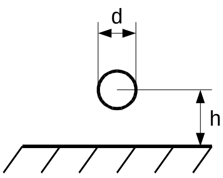
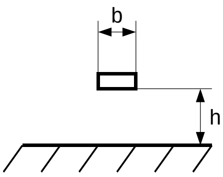
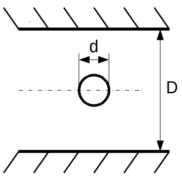
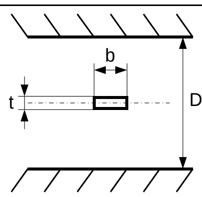
$$Z_o = \frac{U_h}{I_h} = -\frac{U_r}{I_r}$$

Frequenzabhängigkeit der Leitungsbeläge

$$Z_o = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}\sqrt{\frac{1 - j\frac{R'}{\omega L'}}{1 - j\frac{G'}{\omega C'}}}$$

f > 10 kHz $$Z_o \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

6.2 Verschieden HF-Leitungen

	$Z_0 = \frac{60\ \Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln \frac{D}{d}$
	$Z_0 = \frac{60\ \Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln \left(1.078 \frac{D}{d} \right)$ $\quad d/D < 0.8$
	$Z_0 = \frac{60\ \Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln \left(\frac{4d \cdot \tanh\left(\frac{\pi h}{D}\right)}{\pi d} \right)$ $\quad d \ll h \quad d \ll D$
	$Z_0 = \frac{60\ \Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln \frac{A+B}{b+t}$
	$Z_0 = \frac{120\ \Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln \left(\frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1} \right)$
	$Z_0 = \frac{377\ \Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \frac{a}{b}$ $\quad a < b$ $Z_0 = \frac{120\ \Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln \frac{4a}{b}$ $\quad a > b$
	$Z_0 = \frac{60\ \Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln \left(\frac{2h}{d} + \sqrt{\left(\frac{2h}{d}\right)^2 - 1} \right)$ $Z_0 = \frac{60\ \Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln \frac{4h}{d}$ $\quad d \ll h$
	$Z_0 = \frac{377\ \Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \frac{h}{b}$ $\quad h < b$ $Z_0 = \frac{60\ \Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln \frac{8h}{b}$ $\quad h > b$
	$Z_0 = \frac{60\ \Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln \frac{4D}{\pi d}$ $\quad d/D < 0.75$
	$Z_0 = \frac{60\ \Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln \left(\frac{\frac{8}{\pi}}{\frac{b}{D} + 1.4 \frac{t}{D}} \right)$ $\quad t \le 0.25D \quad b \le 0.35(D-t)$

6.3 Spannungs- und Stromverteilung auf der Leitung

$$U_1 = U_2 \cosh\gamma\ell + I_2 Z_o \sinh\gamma\ell$$

$$I_1 = I_2 \cosh\gamma\ell + \frac{U_2}{Z_o}\sinh\gamma\ell$$

$$U_1 = U_z \cosh\gamma z + I_z Z_o \sinh\gamma z$$

$$I_1 = I_z \cosh\gamma z + \frac{U_z}{Z_o}\sinh\gamma z$$

$$\gamma\ell = \alpha\ell + j\beta\ell = \alpha\ell + j\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\ell$$

$$U(z) = U_{1h} e^{-\alpha z} e^{-j\frac{2\pi z}{\lambda}} + U_{1r} e^{\alpha z} e^{j\frac{2\pi z}{\lambda}}$$

$$I(z) = \frac{U_{1h}}{Z_o} e^{-\alpha z} e^{-j\frac{2\pi z}{\lambda}} - \frac{U_{1r}}{Z_o} e^{\alpha z} e^{j\frac{2\pi z}{\lambda}}$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \left(1+\frac{Z_o}{Z_2}\right)\frac{e^{\gamma\ell}}{2} + \left(1-\frac{Z_o}{Z_2}\right)\frac{e^{-\gamma\ell}}{2}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(1+\frac{Z_2}{Z_o}\right)\frac{e^{\gamma\ell}}{2} + \left(1-\frac{Z_2}{Z_o}\right)\frac{e^{-\gamma\ell}}{2}$$

Für Z_2=Z_o verschwindet die reflektierte Welle (ideale Anpassung).

In diesem Fall bleibt

$$\frac{U_1}{U_2} = e^{\gamma\ell} \qquad \frac{I_1}{I_2} = e^{\gamma\ell} \qquad \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = Z_o$$

6.4 Eingangswiderstand und Reflexionsfaktor

$$Z_2 = \frac{U_2}{I_2} = Z_o\frac{U_{2h}+U_{2r}}{U_{2h}-U_{2r}} = Z_o\frac{1+\frac{U_{2r}}{U_{2h}}}{1-\frac{U_{2r}}{U_{2h}}} = Z_o\frac{1+r_2}{1-r_2}$$

$$r_2 = \frac{Z_2 - Z_o}{Z_2 + Z_o}$$

$$r_1 = |r_2| e^{-2\alpha\ell} e^{-j\frac{4\pi\ell}{\lambda}} e^{j\varphi} = |r_2| e^{-2\alpha\ell} e^{j\left(\varphi-\frac{4\pi\ell}{\lambda}\right)}$$ Winkel in Rad

$$r_1 = |r_2| e^{-2\alpha\ell} \angle \varphi - \frac{720° \cdot \ell}{\lambda}$$ Winkel in Grad

$$\alpha = \frac{Np}{\text{Längeneinheit}}$$ 1 Np = 8.686 dB 1 dB = 0.1151 Np

$$Z_1 = Z_o \frac{Z_2 + Z_o \tanh\gamma\ell}{Z_o + Z_2 \tanh\gamma\ell}$$

6.4.1 Zusammenhänge der verschiedenen Reflexionsgrössen

$$r = \frac{U_r}{U_h} = -\frac{I_r}{I_h} = \frac{Z_2 - Z_o}{Z_2 + Z_o} = |r| \angle\varphi \qquad |r| = \frac{s-1}{s+1} = \frac{1-m}{1+m} = 10^{-\frac{RL}{20}} = \frac{|Z_2 - Z_o|}{|Z_2 + Z_o|}$$

$$r\,[dB] = -20 \cdot \log \frac{1}{|r|}$$

$$s = VSWR = \frac{|U_{max}|}{|U_{min}|} = \frac{|I_{max}|}{|I_{min}|} = \frac{|U_h + U_r|}{|U_h - U_r|} = \frac{1}{m} = \frac{1+|r|}{1-|r|} = \frac{1+10^{-\frac{RL}{20}}}{1-10^{-\frac{RL}{20}}} = \left.\frac{|Z_o|}{|Z_2|}\right|_{Z_2<Z_o} = \left.\frac{|Z_2|}{|Z_o|}\right|_{Z_2>Z_o}$$

$$s\,[dB] = 20 \cdot \log s$$

$$m = \frac{|U_{min}|}{|U_{max}|} = \frac{|I_{min}|}{|I_{max}|} = \frac{|U_h - U_r|}{|U_h + U_r|} = \frac{1}{s}$$

$$RL = 10 \cdot \log \frac{P_h}{P_r} = -20 \cdot \log|r| = -20 \cdot \log \frac{s-1}{s+1} = -20 \cdot \log \frac{1-m}{1+m} = -20 \cdot \log \frac{|Z_2 - Z_o|}{|Z_2 + Z_o|}$$

RL [dB]	| r |	VSWR	RL [dB]	| r |	VSWR
1	0.891	17.39	21	0.089	1.196
2	0.794	8.72	22	0.079	1.173
3	0.708	5.85	23	0.071	1.152
4	0.631	4.42	24	0.063	1.135
5	0.562	3.57	25	0.056	1.119
6	0.501	3.01	26	0.050	1.106
7	0.447	2.61	27	0.045	1.094
8	0.398	2.32	28	0.040	1.083
9	0.355	2.10	29	0.035	1.074
10	0.316	1.92	30	0.032	1.065
11	0.282	1.78	31	0.028	1.058
12	0.251	1.67	32	0.025	1.052
13	0.224	1.58	33	0.022	1.046
14	0.200	1.50	34	0.020	1.041
15	0.178	1.43	35	0.018	1.036
16	0.158	1.38	38	0.013	1.025
17	0.141	1.33	40	0.010	1.020
18	0.126	1.29	46	0.005	1.010
19	0.112	1.25	50	0.003	1.006
20	0.100	1.22			

6.5 Verlustlose Leitungen

$$U_1 = \frac{U_2 + Z_o I_2}{2} e^{j\frac{2\pi\ell}{\lambda}} + \frac{U_2 - Z_o I_2}{2} e^{-j\frac{2\pi\ell}{\lambda}}$$

$$I_1 = \frac{U_2 + Z_o I_2}{2Z_o} e^{j\frac{2\pi\ell}{\lambda}} - \frac{U_2 - Z_o I_2}{2Z_o} e^{-j\frac{2\pi\ell}{\lambda}}$$

$$U_1 = U_2 \cos\frac{2\pi\ell}{\lambda} + jZ_o I_2 \sin\frac{2\pi\ell}{\lambda}$$

$$I_1 = I_2 \cos\frac{2\pi\ell}{\lambda} + j\frac{U_2}{Z_o} \sin\frac{2\pi\ell}{\lambda}$$

6.5.1 Eingangswiderstand und Reflexionsfaktor

$$Z_1 = Z_o \frac{Z_2 + jZ_o \tan\frac{2\pi\ell}{\lambda}}{Z_o + jZ_2 \tan\frac{2\pi\ell}{\lambda}}$$

Z_2 = 0 (Kurzschluss) $$Z_{10} = jZ_o \tan\frac{2\pi\ell}{\lambda}$$

Daraus folgt:

Z_1 ist induktiv für $0 < \ell < \frac{\lambda}{4}$

Z_1 ist ∞ für $\ell = \frac{\lambda}{4}$

Z_1 ist kapazitiv für $\frac{\lambda}{4} < \ell < \frac{\lambda}{2}$

Z_1 ist 0 für $\ell = \frac{\lambda}{2}$

Z_2 = ∞ (Leerlauf) $$Z_{1\infty} = -jZ_o \cot\frac{2\pi\ell}{\lambda}$$

Daraus folgt:

Z_1 ist kapazitiv für $0 < \ell < \frac{\lambda}{4}$

Z_1 ist 0 für $\ell = \frac{\lambda}{4}$

Z_1 ist induktiv für $\frac{\lambda}{4} < \ell < \frac{\lambda}{2}$

Z_1 ist ∞ für $\ell = \frac{\lambda}{2}$

$Z_{10} =$ Eingangsimpedanz bei $Z_2 = 0$

$Z_{1\infty} =$ Eingangsimpedanz bei $Z_2 = \infty$

$$Z_{10} = jZ_o \tan\beta\ell \qquad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$Z_{1\infty} = -jZ_o \cot\beta\ell$$

$$Z_{10} \cdot Z_{1\infty} = j \cdot (-j) Z^2 \tan\beta\ell \cdot \cot\beta\ell = Z_o^{\ 2}$$

$$Z_o = \sqrt{Z_{10} \cdot Z_{1\infty}} \qquad \beta\ell = \tan^{-1}\sqrt{-\frac{Z_{10}}{Z_{1\infty}}}$$

$$\ell = \frac{\lambda}{4} \qquad Z_1 = \frac{Z_o^{\ 2}}{Z_2}$$

$$\ell = \frac{\lambda}{2} \qquad Z_1 = Z_2$$

$$\alpha\ell = 0$$

$$r_1 = r_2\, e^{-j\frac{4\pi\ell}{\lambda}}$$

$$r_1 = |r_2|\, e^{j\varphi} e^{-j\frac{4\pi\ell}{\lambda}} = |r_2|\, e^{j\left(\varphi - \frac{4\pi\ell}{\lambda}\right)}$$

$$|r_1| = |r_2| = \frac{1-m}{1+m} = \frac{s-1}{s+1}$$

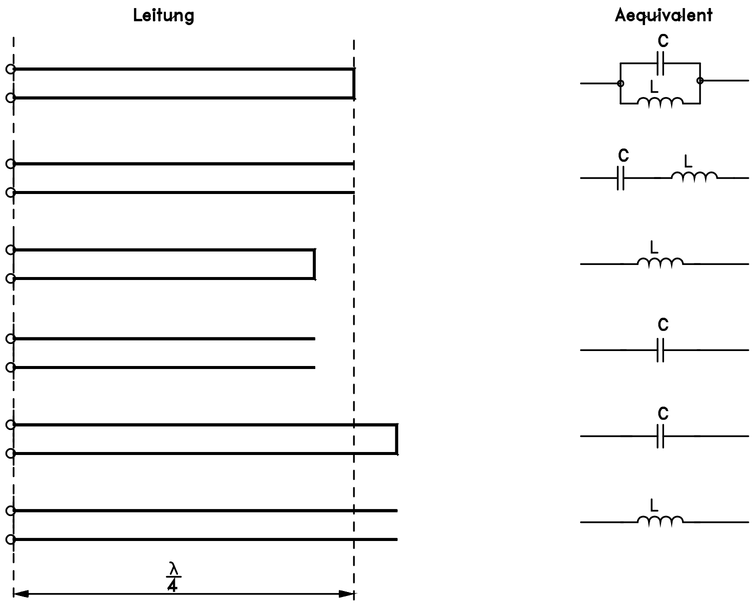
6.6 Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v_d = \frac{c_o}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

$$v_r = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

$$\ell_{mech} = \frac{\ell_{el}}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \ell_{el} v_r$$

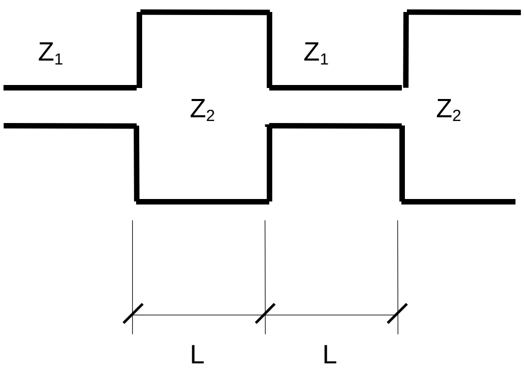
6.7 Leitungen als Schaltungsbauteile



6.8 λ/4-Transformator

$$Z_1 = \frac{Z_o^{\;2}}{Z_2}$$

6.9 Nonsynchronous-Transformer



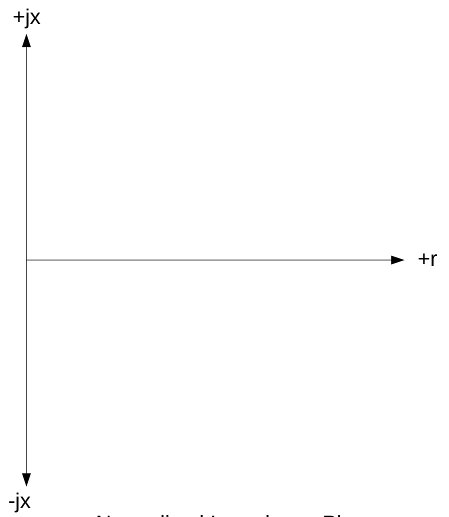
L = Leitungslänge einer Sektion

$$R = Z_1 / Z_2$$

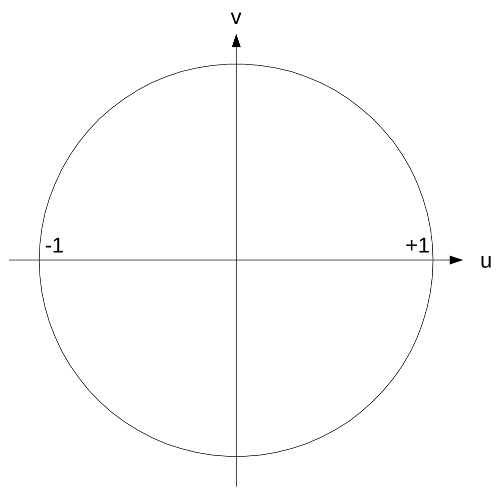
$$L = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}} \operatorname{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{R + \frac{1}{R} + 1}} \right)$$

6.10 Smith-Diagramm

6.10.1 Smith Chart Equations



Normalized Impedance Plane



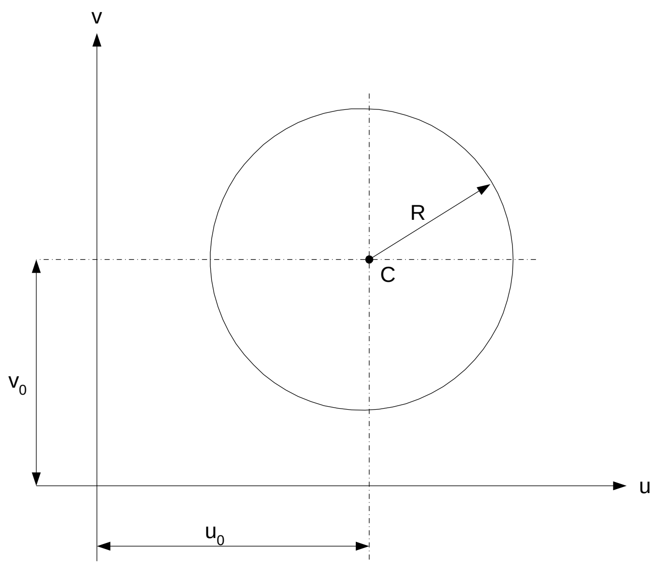
Γ-Plane

$$z = r + jx = \frac{Z}{Z_0} = \frac{R}{Z_0} + j\frac{X}{Z_0}$$

$$\Gamma = u + jv = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} = \frac{r + jx - 1}{r + jx + 1}$$

$$Z_0 = \text{real}$$

General circle equation:



$$\left(u - u_0\right)^2 + \left(v - v_0\right)^2 = R^2$$

Using $\Gamma = u + jv = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} = \frac{r + jx - 1}{r + jx + 1}$ after some algebraic manipulation we get circles for Re(z) and Im(z):

Real part of z:

$$C_{Re(z)} = u_0; v_0 = \frac{r}{r+1}; 0$$

$$R_{Re(z)} = \frac{1}{r+1}$$

Imaginary part of z:

$$C_{Im(z)} = u_0; v_0 = 1; \frac{1}{x}$$

$$R_{Im(z)} = \frac{1}{x}$$

Q-Circles

$$Q = \left|\frac{x}{r}\right| = \left|\frac{+x}{r}\right| = \left|\frac{-x}{r}\right|$$

$$C_Q = u_0; v_0 = 0; \pm\frac{1}{Q}$$

$$R_Q = \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}}$$

VSWR-Circles

$$|\Gamma| = \frac{VSWR - 1}{VSWR + 1}$$

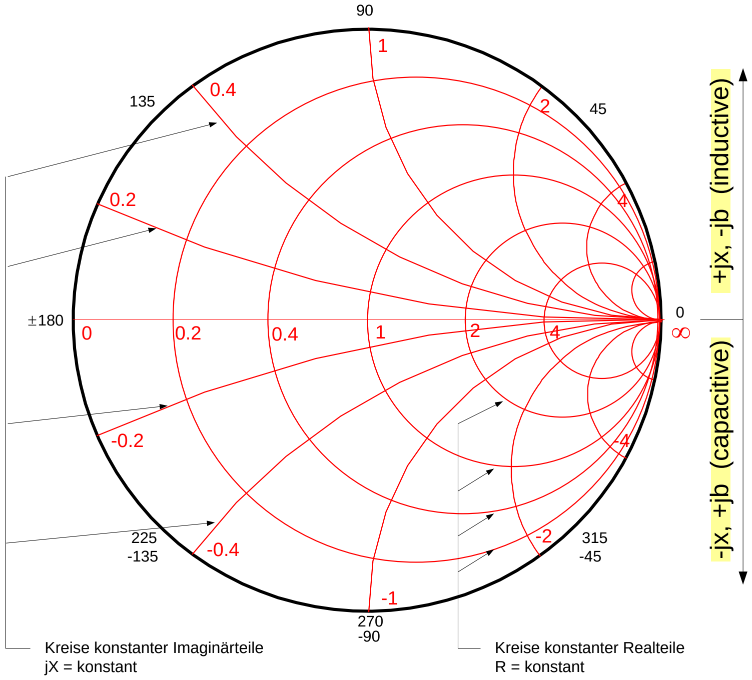
$$C_{VSWR} = u_0; v_0 = 0; 0$$

$$R_{VSWR} = \frac{VSWR - 1}{VSWR + 1}$$

6.10.2 Smith-Chart

Impedanzebene

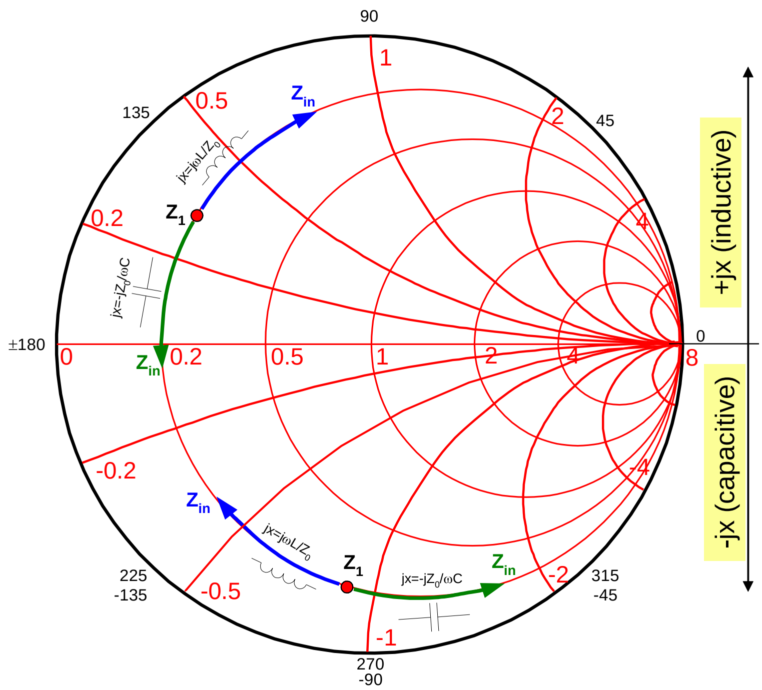
$Z = R \pm jX$

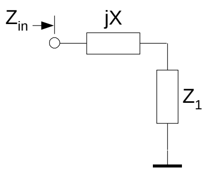


Impedanzebene

$Z = R \pm jX$

Serie L oder C





$Z_1 = R_1 + jX_1$

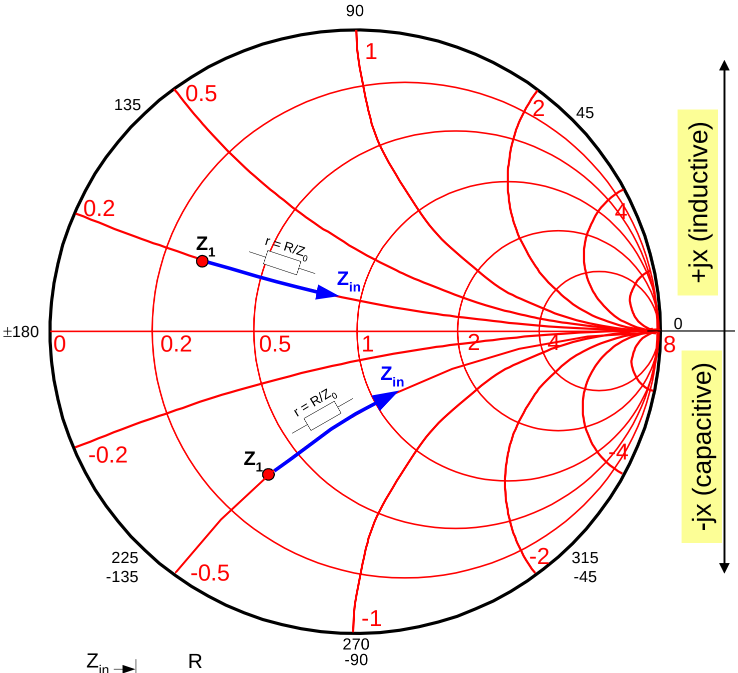
$Z_{in} = R + j(X_1 \pm X)$

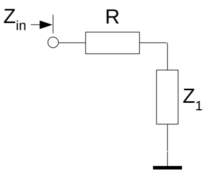
Realteil = konstant

Impedanzebene

$Z = R \pm jX$

Serie R



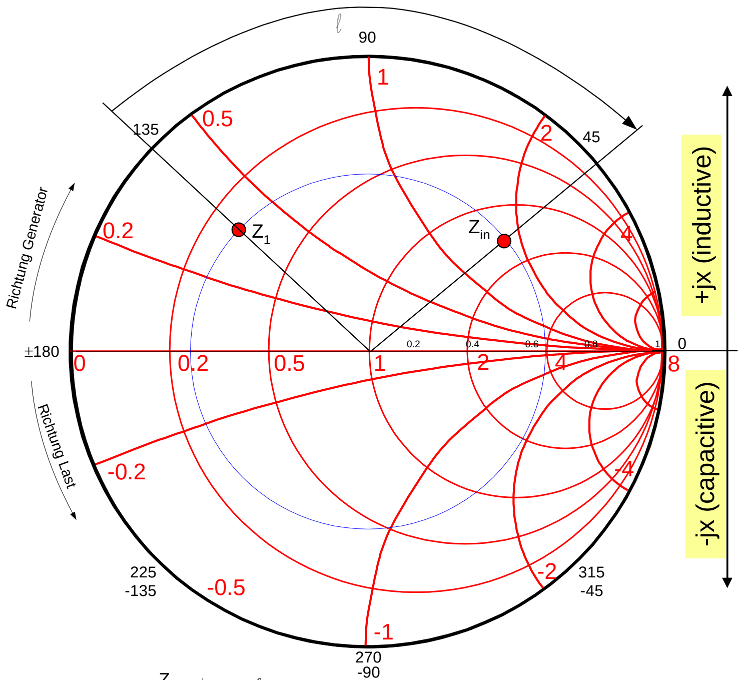


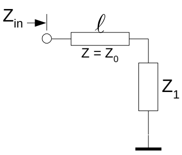
$$Z_1 = R_1 + jX_1$$

$$Z_{in} = (R_1 + R) + jX_1$$

Imaginärteil = konstant

Verlustlose Serieleitung



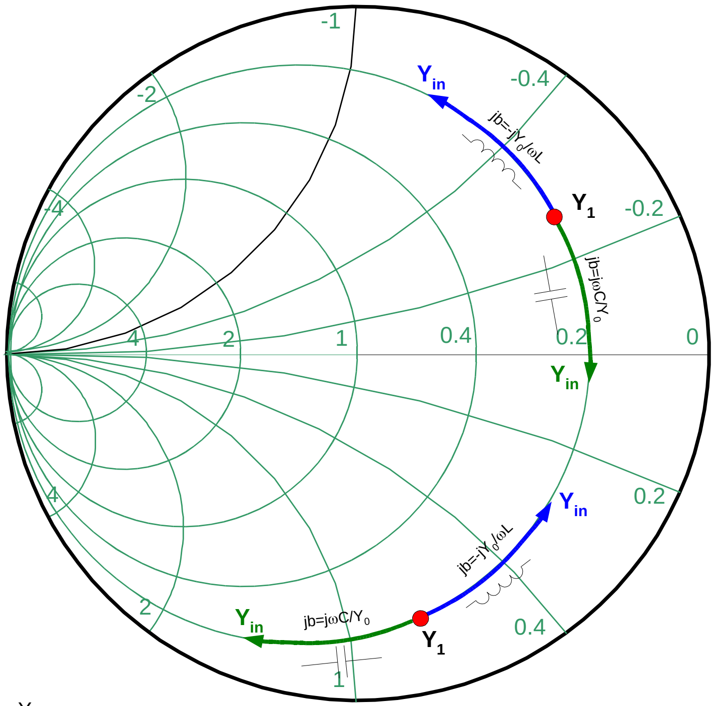


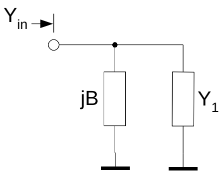
VSWR = konstant

Admittanzebene

$Y = G \pm jB$

Parallel L oder C



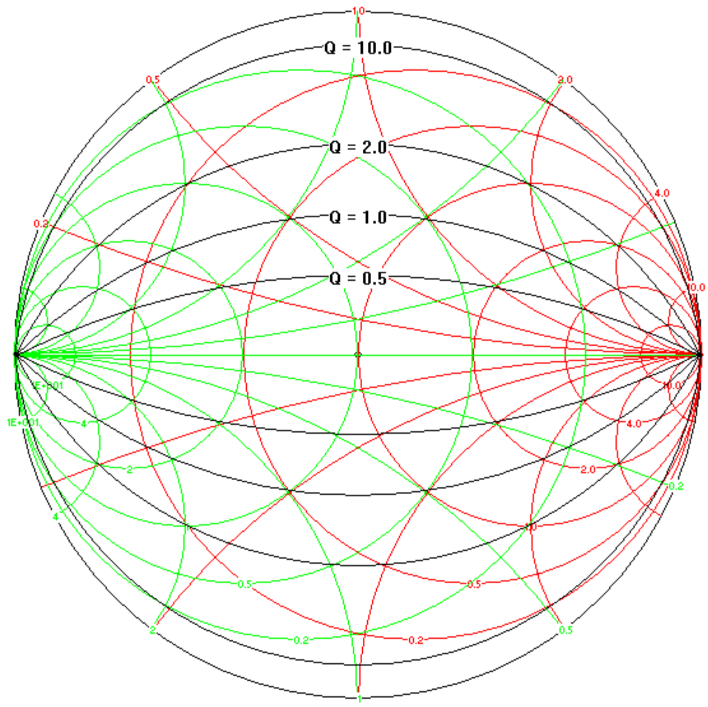


$Y_1 = G_1 + jB_1$

$Y_{in} = G + j(B_1 \pm B)$

Realteil = konstant

Konstant-Q-Kreise

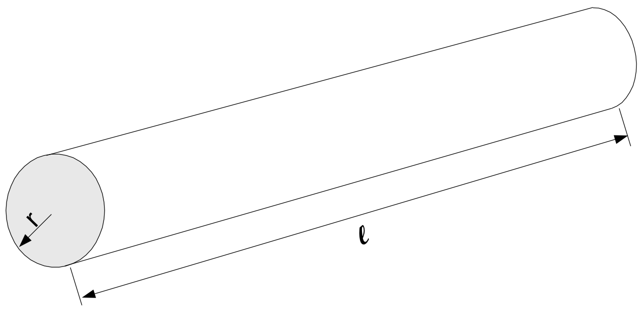


7 Stromverdrängung, Skin-Effekt

Fliesst ein Wechselstrom durch einen Leiter, so ist der gesamte Raum innerhalb und ausserhalb des Leiters mit einem magnetischen Wechselfeld erfüllt, das wiederum Spannungen im Leiter induziert. Die dadurch hervorgerufenen Ströme überlagern sich dem induzierenden Strom so, dass die Stromdichte im Leiter an dessen Oberfläche am grössten ist. Diese Erscheinung bezeichnet man als Stromverdrängung oder **Skin-Effekt**.

Die Abnahme des Stromes nach dem Leiterzentrum verläuft nach einer e-Funktion.

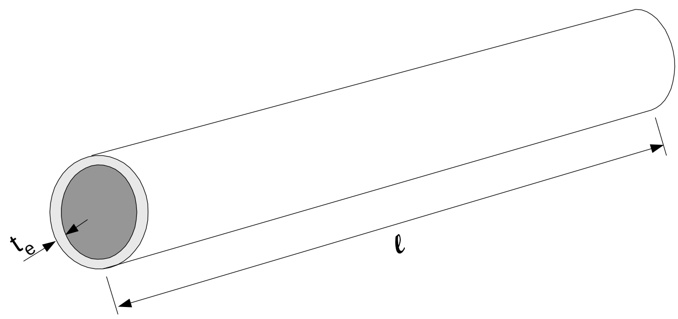
Bei hohen Frequenzen berechnet man den Wirkwiderstand R_w eines runden Leiters mit dem Radius r mit der Näherungsgleichung:



$$R_w \approx \frac{\ell}{2\pi r\gamma}\sqrt{\pi f \gamma \mu_o \mu_r}$$

R_W = Wirkwiderstand des Leiters
ℓ = Länge des Leiters
r = Radius des Leiters
f = Frequenz
γ = Leitfähigkeit = $\frac{1}{\rho}$
μ_o = Induktionskonstante = $1.2566 * 10^{-6}$ H/m = $1.2566 * 10^{-6}$ Vs/Am
μ_r = Permeabilitätszahl (Nichtmagnetisch = 1)

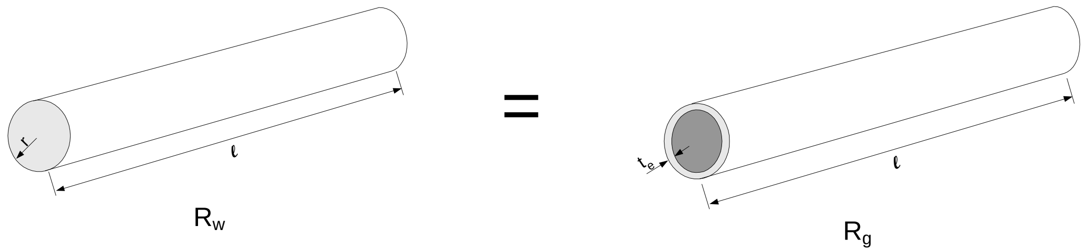
Der Widerstand R_w ist gleich dem Gleichstromwiderstand R_g eines hohlen Leiters mit dem Aussenradius r und der Ringdicke t_e.



Für $t_e << r$ gilt:

$$R_g = \frac{\ell}{2\pi r\, t_e \gamma}$$

Durch gleichsetzen von R_w und R_g erhält man die Leitschichtdicke, oder Eindringtiefe t_e:



$$t_e = \frac{1}{\sqrt{\pi f \gamma \mu_o \mu_r}}$$

Im Abstand t_e von der Leiteroberfläche ist der Strom auf das 1/e-fache (37%) abgesunken, im Abstand von 5*t_e auf <1%.

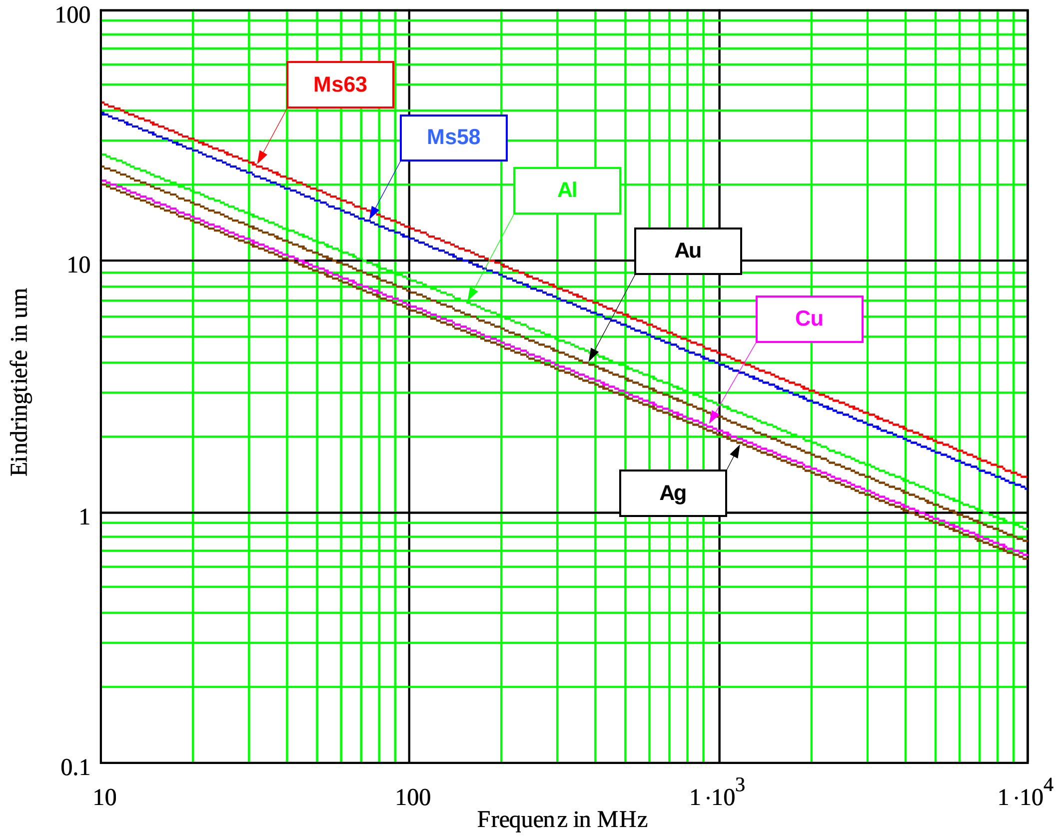
Für **Kupfer** mit $\gamma = 58 \cdot 10^6 \ \mathrm{Sm/m^2}$ erhält man die Zahlenwertformel:

$$t_e = \frac{0.06609}{\sqrt{f}} \qquad [\mathrm{mm}]$$

f in MHz

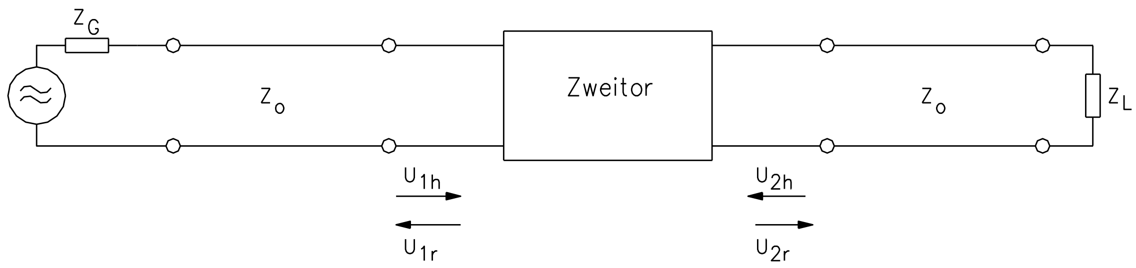
Material	Leitfähigkeit γ in Sm/m^2
Ag	$62.5 \cdot 10^6$
Au	$45 \cdot 10^6$
Al	$36 \cdot 10^6$
Cu	$58 \cdot 10^6$
Ms58	$17 \cdot 10^6$
Ms63	$14 \cdot 10^6$

Eindringtiefen in Silber, Kupfer, Gold, Aluminium und Messing:



8 S-Parameter

(Streuparameter, Scattering-Parameter)



$$U_1 = U_{1h} + U_{1r} \qquad U_2 = U_{2h} + U_{2r}$$

$$I_1 = \frac{U_{1h} - U_{1r}}{Z_o} \qquad I_2 = \frac{U_{2h} - U_{2r}}{Z_o}$$

$$U_{1r} = S_{11}U_{1h} + S_{12}U_{2h}$$

$$U_{2r} = S_{21}U_{1h} + S_{22}U_{2h}$$

Nach Division beider Seiten der Gleichungen durch $\sqrt{Z_O}$ erhält man die neuen Variablen :

$$a_1 = \frac{U_{1h}}{\sqrt{Z_o}} \qquad a_2 = \frac{U_{2h}}{\sqrt{Z_o}}$$

$$b_1 = \frac{U_{1r}}{\sqrt{Z_o}} \qquad b_2 = \frac{U_{2r}}{\sqrt{Z_o}}$$

Die Gleichungen zur Beschreibung des Zweitors lauten damit:

$$\boxed{\begin{aligned} b_1 &= S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_2 &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{aligned}} \qquad \text{N4.4}$$

oder in allgemeiner Matrizenschreibweise:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \qquad \text{N4.5}$$

Die Betragsquadrate dieser Variablen bedeuten:

$|a_1|^2 =$ am Eingang des Zweitors einfallende Leistung

$|b_1|^2 =$ am Eingang des Zweitors reflektierte Leistung

$|a_2|^2 =$ am Ausgang des Zweitors einfallende Leistung

$|b_2|^2 =$ am Ausgang des Zweitors austretende Leistung

Die physikalische Deutung der s-Parameter ergibt:

S_{11} = **Eingangsreflexionsfaktor bei angepasstem Ausgang**

S_{12} = **Rückwärtsübertragungsfaktor bei angepasstem Eingang**

S_{21} = **Vorwärtsübertragungsfaktor bei angepasstem Ausgang**

S_{22} = **Ausgangsreflexionsfaktor bei angepasstem Eingang**

$$|S_{11}|^2 = \frac{\text{Leistung reflektiert an Tor 1}}{\text{Leistung einfallend an Tor 1}} = |r_1|^2$$

$$|S_{12}|^2 = \frac{\text{Leistung geliefert an eine Last } Z_o \text{ an Tor 1}}{\text{Leistung verfügbar von einer Quelle mit } Z_G = Z_o \text{ an Tor 2}}$$

$$= \text{Rückwärtsleistungsübertragungsverhältnis bei } Z_G = Z_L = Z_o$$

$$|S_{21}|^2 = \frac{\text{Leistung geliefert an eine Last } Z_o \text{ an Tor 2}}{\text{Von der Quelle mit } Z_G = Z_o \text{ an Tor 1 verfügbare Leistung}}$$

$$= \text{Leistungsübertragungsverhältnis bei } Z_G = Z_L = Z_o$$

$$|S_{22}|^2 = \frac{\text{Leistung reflektiert an Tor 2}}{\text{Leistung einfallend an Tor 2}} = |r_2|^2$$

$$10\log|S_{11}|^2 = 20\log|S_{11}| = \text{Reflexionsdämpfung (Returnloss) am Eingang}$$

$$10\log|S_{12}|^2 = 20\log|S_{12}| = \text{Einfügungsdämpfung rückwärts}$$

$$10\log|S_{21}|^2 = 20\log|S_{21}| = \text{Einfügungsdämpfung vorwärts}$$

$$10\log|S_{22}|^2 = 20\log|S_{22}| = \text{Reflexionsdämpfung (Returnloss) am Ausgang}$$

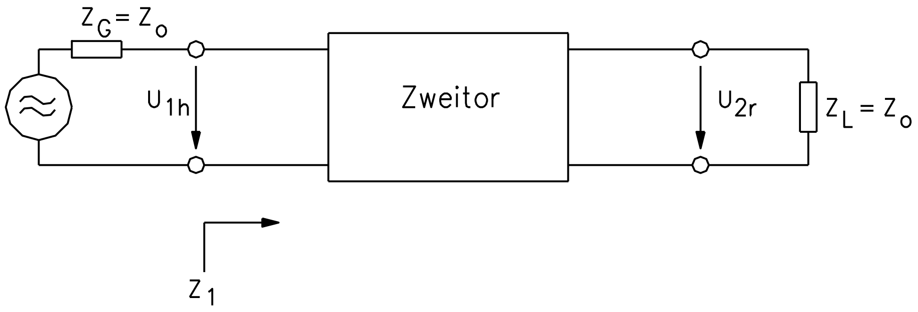
Die S-Parameter können somit bestimmt werden mit

$$S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0} = \left.\frac{U_{1r}/\sqrt{Z_o}}{U_{1h}/\sqrt{Z_o}}\right|_{a_2=0} = \left.\frac{U_{1r}}{U_{1h}}\right|_{a_2=0} = \left.r_1\right|_{r_2=0} = \left.\frac{Z_1 - Z_o}{Z_1 + Z_o}\right|_{Z_L=Z_o}$$

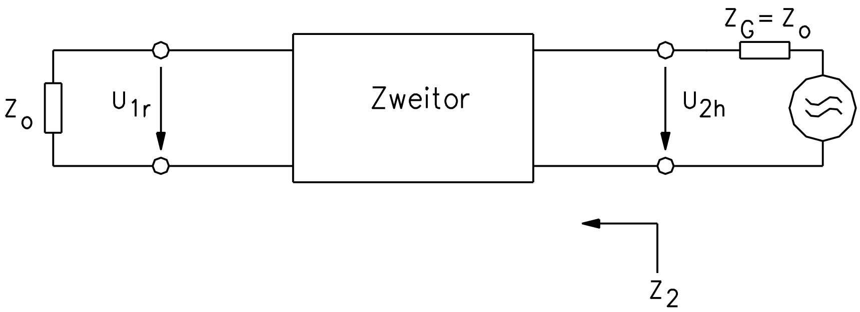
$$S_{12} = \left.\frac{b_1}{a_2}\right|_{a_1=0} = \left.\frac{U_{1r}}{U_{2h}}\right|_{a_1=0}$$

$$S_{21} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0} = \left.\frac{U_{2r}}{U_{1h}}\right|_{a_2=0}$$

$$S_{22} = \left.\frac{b_2}{a_2}\right|_{a_1=0} = \left.\frac{U_{2r}}{U_{2h}}\right|_{a_1=0} = \left.r_2\right|_{r_1=0} = \left.\frac{Z_2 - Z_o}{Z_2 + Z_o}\right|_{Z_G=Z_o}$$



Beschaltung des Zweitors zur Bestimmung von S_{11} und S_{21}



Beschaltung des Zweitors zur Bestimmung von S_{22} und S_{12}

8.1 Messung der S-Parameter

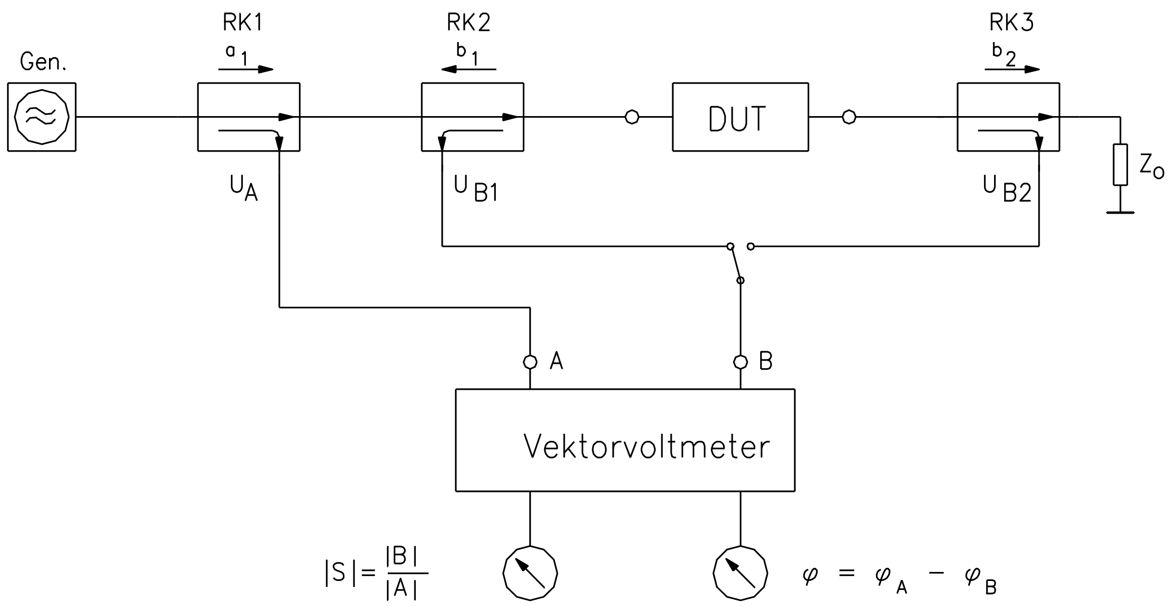


Bild 4.2.1: Schaltung zur Messung der S-Parameter

Die Wirkungsweise der Messchaltung ergibt sich direkt aus den Ausführungen im vorausgehenden Abschnitt.

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{U_{B1}}{U_A}$$

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1} = \frac{U_{B2}}{U_A}$$

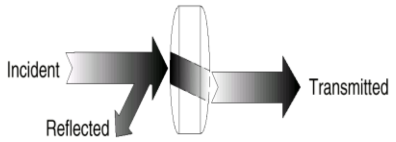
Für die Messung von S_{22} und S_{12} wird entweder das Messobjekt DUT (Device Under Test) umgedreht, oder mit einem sogenannten S-Parameter Test Set über HF-Schalter die Messanordnung zur Rückwärtsspeisung umgeschaltet.

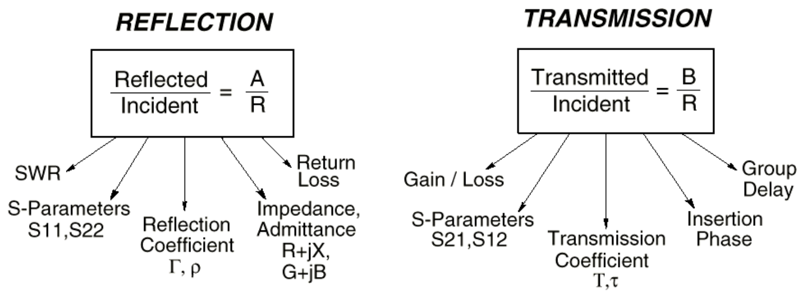
Zur Kalibrierung der Messanordnung für S_{11} wird das DUT durch einen Kurzschluss (Leerlauf) ersetzt und die Anzeige auf 1 /180° (1 /0°) kalibriert.

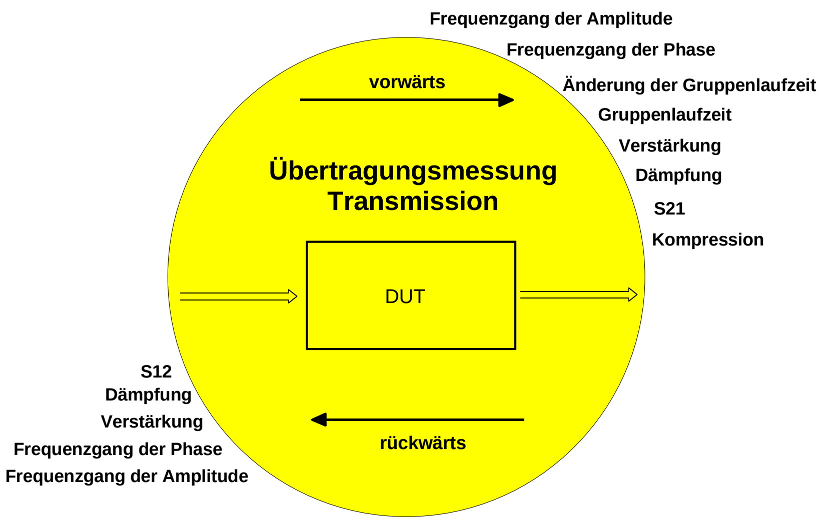
Entsprechend wird bei der Kalibrierung von S_{21} verfahren, indem das DUT durch eine reflektionsfreie Verbindung ersetzt wird und die Anzeige auf 1 /0° kalibriert wird.

8.1.1 Parameterübersicht

Transmission - Reflexion



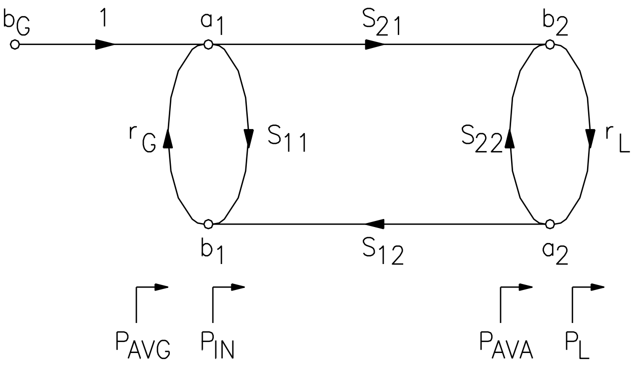




8.2 Beschaltete Zweitore

Die folgenden Gleichungen sind mit Hilfe der "Flow Chart Analysis" abgeleitet. Diese Methode eignet sich sehr gut zur Bearbeitung von beschalteten Zweitoren.

In Lit..[N4.3],.[N4.5],.[N4.9],.[N4.10]. ist dieses Verfahren sehr verständlich beschrieben.



$$P_{AVG} = P_{IN}\Big|_{r_1 = r_G^*}$$

$$P_{AVA} = P_L\Big|_{r_L = r_2^*}$$

8.2.1 Verstärkungsdefinitionen

Für beschaltete Zweitore sind folgende Verstärkungen definiert:

Übertragungsleistungsverstärkung (Transducer Power Gain):

$$G_T = \frac{\text{Leistung geliefert an Last}}{\text{Leistung verfügbar von Gen.}} = \frac{P_L}{P_{AVG}} = \text{ Uebertragungsleistungsverstärkung}$$

Betriebsleistungsverstärkung (Operating Power Gain):

$$G_p = \frac{\text{Leistung geliefert an Last}}{\text{Leistung geliefert an Eingang}} = \frac{P_L}{P_{IN}} = \text{ Betriebsleistungsverstärkung}$$

Verfügbare Leistungsverstärkung (Available Power Gain):

$$G_A = \frac{\text{Leistung verfügbar vom Ausg.}}{\text{Leistung verfügbar vom Gen.}} = \frac{P_{AVA}}{P_{AVG}} = \text{ verfügbare Leistungsverstärkung}$$

8.2.2 $Z_G = Z_0 = Z_L$

Uebertragungsleistungsverstärkung (transducer power gain):

$$G_T = |S_{21}|^2 \qquad G_T\ \text{dB} = 10\log|S_{21}|^2 = 20\log|S_{21}|$$

Betriebsverstärkung (operating power gain):

$$G_p = \frac{|S_{21}|^2}{1-|S_{11}|^2}$$

8.2.3 Unilaterale Zweitore (rückwirkungsfrei)

Rückwirkungsfrei bedeutet, dass $S_{12} = 0$ ist (oder vernachlässigbar klein).

In diesem Falle wird $r_1=S_{11}$ und $r_2=S_{22}$.

Unilaterale Übertragungsleistungsverstärkung (unilateral transducer power gain):

$r_G \neq S_{11}$ und $r_L \neq S_{22}$:

$$G_{TU} = \frac{1-|r_G|^2}{|1-r_G S_{11}|^2} \cdot |S_{21}|^2 \cdot \frac{1-|r_L|^2}{|1-r_L S_{22}|^2}$$

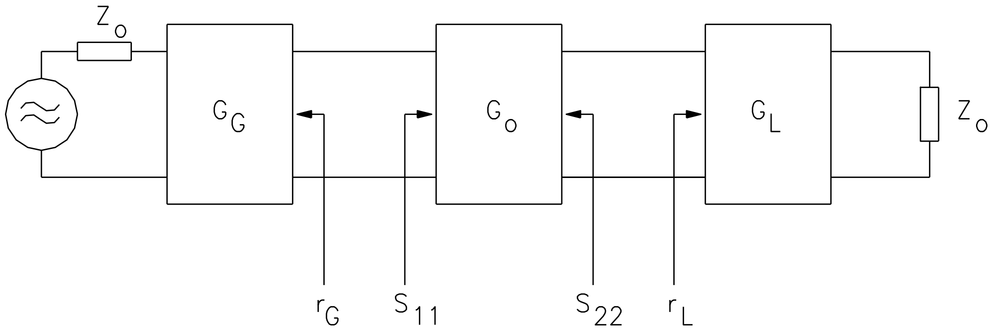
$$G_{TU} = G_G \cdot G_o \cdot G_L$$

wobei

$$G_G = \frac{1-|r_G|^2}{|1-r_G S_{11}|^2}$$

$$G_o = |S_{21}|^2$$

$$G_L = \frac{1-|r_L|^2}{|1-r_L S_{22}|^2}$$



Maximale Unilaterale Übertragungsleistungsverstärkung (maximum unilateral transducer power gain):

Den maximalen Gewinn und damit die maximale Unilaterale Uebertragungsleistungsverstärkung erhalten wir durch Anpassung am Ein- und Ausgang mit

$r_G = S_{11}^*$ und $r_L = S_{22}^*$ (konjugiert komplexe Anpassung):

$$G_{G_{max}} = \frac{1}{1-|S_{11}|^2}$$

$$G_{L_{max}} = \frac{1}{1-|S_{22}|^2}$$

$$\boxed{G_{TU_{max}} = \frac{1}{1-|S_{11}|^2} \cdot |S_{21}|^2 \cdot \frac{1}{1-|S_{22}|^2}}$$

8.2.4 Nicht unilaterale Zweitore

Übertragungsleistungsverstärkung (transducer power gain):

$$G_T = \frac{1-|r_G|^2}{|1-r_G S_{11}|^2} \cdot |S_{21}|^2 \cdot \frac{1-|r_L|^2}{|1-r_L r_2|^2}$$

$$r_2 = S_{22} + \frac{S_{12} S_{21} r_G}{1-S_{11} r_G}$$

oder

$$G_T = \frac{1-|r_G|^2}{|1-r_G r_1|^2} \cdot |S_{21}|^2 \cdot \frac{1-|r_L|^2}{|1-r_L S_{22}|^2}$$

$$r_1 = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} r_L}{1-S_{22} r_L}$$

Verfügbare Leistungsverstärkung (available power gain):

$$G_A = \frac{1-|r_G|^2}{|1-r_G S_{11}|^2} \cdot |S_{21}|^2 \cdot \frac{1}{1-|r_2|^2}$$

Maximale Betriebsleistungsverstärkung (maximum operating power gain):

$r_G = r_1^*$ und $r_L = r_2^*$

$$G_{p_{max}} = \frac{|S_{21}|}{|S_{12}|}\left(K - \sqrt{K^2-1}\right)$$

$$K = \frac{1+|\Delta|^2 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2}{2 \cdot |S_{12}| \cdot |S_{21}|} \geq 1$$

$$\Delta = S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}$$

$$r_1 = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}r_L}{1 - S_{22}r_L}$$

$$r_2 = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}r_G}{1 - S_{11}r_G}$$

Maximale stabile Betriebsverstärkung:

$$\boxed{G_{p_{max(stabil)}} = \frac{|S_{21}|}{|S_{12}|} \qquad (K = 1)}$$

8.3 Stabilität

Instabil (unstable)

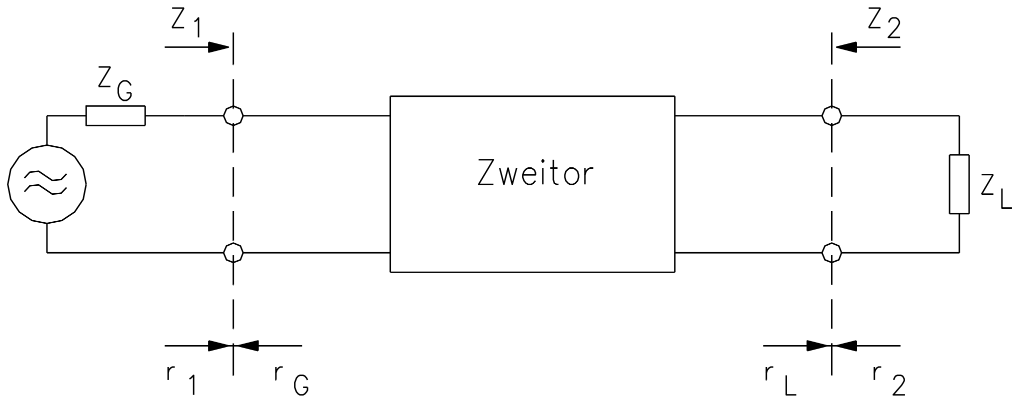
ist ein Zweitor, wenn Störamplituden anklingen und so zu einer Oszillation führen.

Unbedingt stabil (unconditionally stable)

ist ein Zweitor, wenn bei einer Frequenz der Realteil von Z_1 und Z_2 positiv ist für alle positiven, reellen Quell- und Lastimpedanzen (Z_G und Z_L).

Bedingt stabil (conditionally stable)

ist ein Zweitor, wenn bei einer Frequenz der Realteil von Z_1 und Z_2 positiv ist für einige positive, reelle Quell- und Lastimpedanzen (Z_G und Z_L).



8.3.1 Unstabil (unstable)

Oszillationen eines Zweitors sind nur möglich, wenn Z_1 oder Z_2 (oder beide) einen negativen Realteil besitzen.

Das bedeutet:

$$|r_1| > 1$$

oder

$$|r_2| > 1$$

Für den unilateralen Verstärker bedeutet dies:
(vergleiche N4.8 , N4.9 für $G \to \infty$)

$$|S_{11}| > 1$$

oder

$$|S_{22}| > 1$$

8.3.2 Unbedingt stabil (unconditionally stable)

$$|r_G| < 1$$

$$|r_L| < 1$$

$$|r_1| = \left| S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}r_L}{1 - S_{22}r_L} \right| < 1$$

$$|r_2| = \left| S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}r_G}{1 - S_{11}r_G} \right| < 1$$

Aus den Gleichungen N4.18 bis N4.21 können folgende Bedingungen für unbedingte Stabilität abgeleitet werden:

$$|r_G| < 1$$

$$|r_L| < 1$$

$$|S_{11}| < 1$$

$$|S_{22}| < 1$$

$$K = \frac{1 - |S_{22}|^2 - |S_{11}|^2 + |\Delta S|^2}{2|S_{12}S_{21}|} > 1$$

$$|\Delta S| < 1$$

$$|\Delta S| = |S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}|$$

Eine neuere Stabilitätsdefinition MU nach Edwards/Sinsky berücksichtigt die für K notwendigen Nebenbedingungen und erlaubt eine sichere Stabilitätsuntersuchung.

$$MU = \frac{1 - |S_{11}|^2}{\left|S_{22} - \Delta S \cdot S^*_{11}\right| + |S_{21}S_{12}|}$$

Für unbedingte Stabilität muss gelten: $MU > 1$

$S^*_{11} = \text{konjugiert komplexes } S_{11}$

$\Delta S = S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}$

8.3.3 Bedingt stabil (conditionally stable)

Es können vielleicht Werte für r_G und/oder r_L gefunden werden, bei denen der Realteil von Z_1 und Z_1 positiv wird. Dies ergibt die bedingte Stabilität, d.h. Stabilität ist nur für bestimmte Wertebereiche von Z_G und Z_L gegeben.

Mit Hilfe einer graphischen Darstellung in der Smith-Chart können diese Lösungen gefunden werden.

8.4 Touchstone S-Parameter Fileformat

Twoport-Parameter - Files (S-, H-, Z-, Y- and ABCD-Parameter) in Touchstone ® - Format must follow the rules below:

- In one line all characters after a exclamation-mark '!' are comment only. The line terminates with *carriage return* and *line feed*

- In front of data there must be a parameter-line:
  # <Frequency unit> <Parameter-designation> <Format> <R n>

  #: Parameter-line designator

  <Frequency unit>: 'GHz', 'MHz', 'kHz' or 'Hz'

  <Parameter-Designation>:
  'S' for S-Parameter
  'H' for H-Parameter
  'Z' for Z-Parameter
  'Y' for Y-Parameter.

  <Format>:
  'MA': magnitude-angle
  'DB': decibel-angle
  'RI': real-imaginary

  <R n>: n = normalization impedance in Ohm (e.g. R 50)

- Data:
  Each line contains the data for one frequency. The parameters are separated with one space minimum. Data must be in following sequence:

  1. Frequency
  2. Real part or magnitude of x_{11}

3. Imaginary part or angle of x_{11}
4. Real part or magnitude of x_{21}
5. Imaginary part or angle of x_{21}
6. Real part or magnitude of x_{12}
7. Imaginary part or angle of x_{12}
8. Real part or magnitude of x_{22}
9. Imaginary part or angle of x_{22}

x = S, H, Z, or Y.
Frequencies must be ascending sequence

At the end of the twoport parameters, noise parameters can be added:

Each line contains the data for one frequency. The parameters are separated with one space minimum. Data must be in following sequence

1. Frequency
2. Nfmin Minimum Noise Figure in dB
3. Magnitude of reflection coefficient for NFmin (Gamma_opt)
4. Angle of reflection coefficient for NFmin (Gamma_opt) in degree
5. Normalized equivalent noise resistor

The lowest noise parameter frequency must be less or equal to the highest S-Parameter frequency.

Example:

```
! SIEMENS Small Signal Semiconductors
! CF750
! GaAs Microwave Monolithic Integrated Circuit in SOT143
! VDGND = 3.8 V    ID = 2 mA
! Common Source S-Parameters:                April  1992
!   Parameters valid for V D-GND between 3.0 and 5.0 VDC
!   for Id=1.6mA MAG[S21] is abt. 10% lower
!   for Id=2.8mA MAG[S21] is abt. 20% higher
!   >>>>>> Source bypass capacitor must be low inductance!!
# GHz  S  MA  R  50
!  f          S11            S21            S12            S22
! GHz     MAG   ANG     MAG   ANG     MAG   ANG     MAG   ANG
 0.010  0.9700   -1.0  1.780  179.0  0.0020  89.0  0.9800   -1.0
 0.100  0.9700   -3.0  1.780  175.0  0.0080  84.0  0.9800   -2.0
 0.250  0.9600   -8.0  1.760  169.0  0.0150  78.0  0.9700   -6.0
 0.500  0.9400  -16.0  1.730  155.0  0.0270  75.0  0.9500  -11.0
 0.750  0.9100  -26.0  1.700  141.0  0.0390  71.0  0.9300  -16.0
 1.000  0.8700  -34.0  1.680  127.0  0.0460  64.0  0.9100  -22.0
 1.250  0.8300  -42.0  1.650  118.0  0.0540  62.0  0.8900  -26.0
 1.500  0.7800  -49.0  1.620  108.0  0.0610  57.0  0.8800  -30.0
 1.750  0.7200  -57.0  1.590   95.0  0.0660  55.0  0.8700  -34.0
 2.000  0.6600  -65.0  1.540   82.0  0.0690  52.0  0.8600  -38.0
 2.250  0.6100  -73.0  1.510   71.0  0.0710  54.0  0.8500  -43.0
 2.500  0.5600  -81.0  1.470   60.0  0.0730  60.0  0.8400  -48.0
 2.750  0.5200  -87.0  1.450   52.0  0.0740  63.0  0.8300  -52.0
 3.000  0.4900  -93.0  1.420   45.0  0.0750  66.0  0.8200  -56.0
!
! NOISE
!  f      Fmin   Gammaopt  rn/50
```

```
! GHz      dB    MAG  ANG    -
 0.900     1.60  0.63   26   0.98
 1.800     1.90  0.52   51   0.72
!
! SIEMENS AG  Semiconductor Group, Munich
```

9 Zweitore

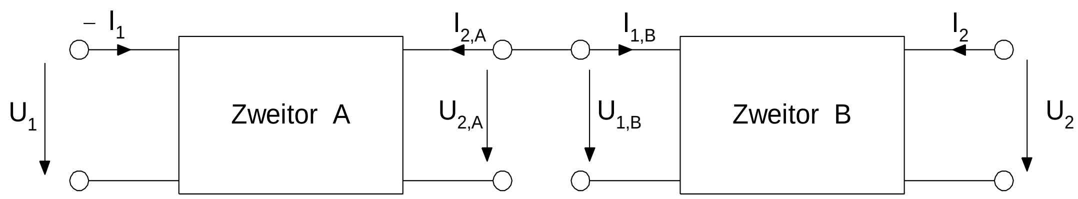
9.1 Zusammenschaltung von Zweitoren

Nebst der Kaskadenschaltung von Zweitoren sind auch andere Zusammenschaltungen möglich:

- Kaskadierung
- Serie-Serie-Schaltung
- Parallel-Parallel-Schaltung
- Serie-Parallel-Schaltung
- Parallel-Serie-Schaltung

In der Namensgebung bezeichnet der erste Ausdruck die Beschaltung am Eingang, der zweite Ausdruck die Beschaltung am Ausgang.

- **Kaskadierung**

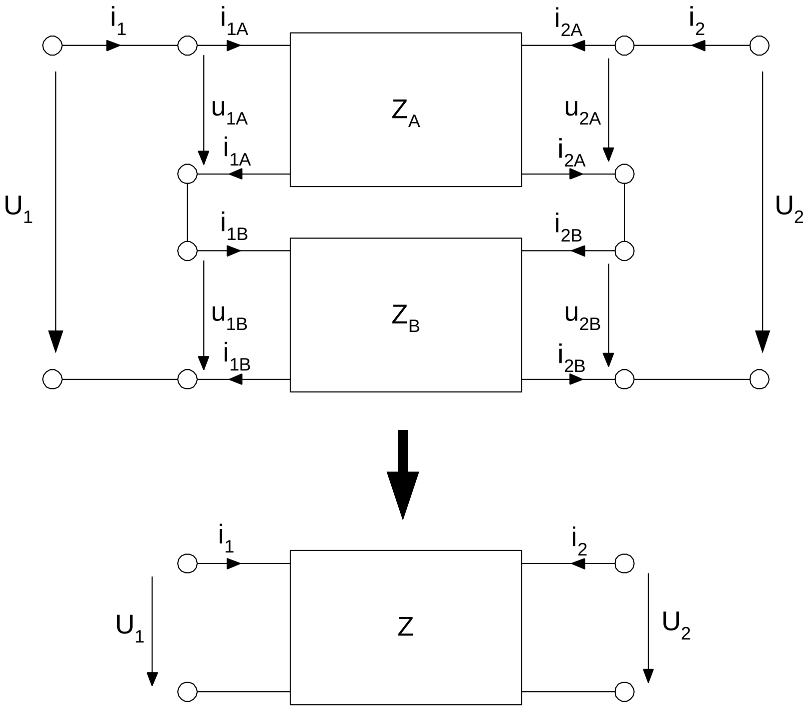


$$\boxed{A = A_A \cdot A_B}$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11A} & A_{12A} \\ A_{21A} & A_{22A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11B} & A_{12B} \\ A_{21B} & A_{22B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11A}A_{11B} + A_{12A}A_{21B} & A_{11A}A_{12B} + A_{12A}A_{22B} \\ A_{21A}A_{11B} + A_{22A}A_{21B} & A_{21A}A_{12B} + A_{22A}A_{22B} \end{pmatrix}}$$

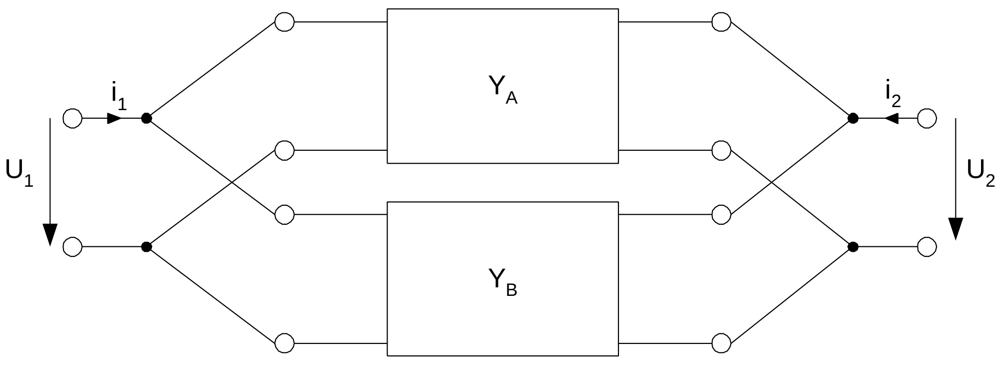
(Die Multiplikation von Matrizen ist nicht kommutativ: $A \cdot B \neq B \cdot A$)

- **Serie-Serie-Schaltung**



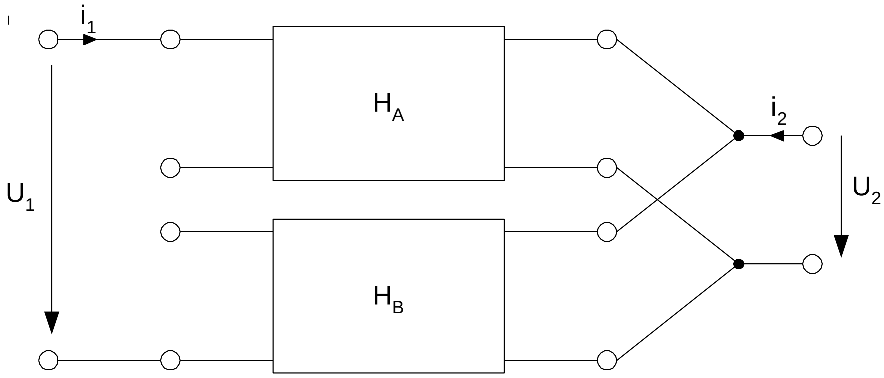
$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B$$

- **Parallel-Parallel-Schaltung**



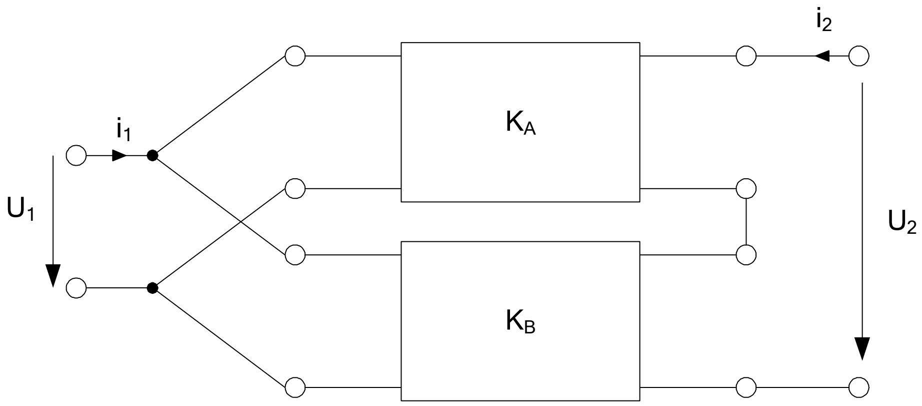
$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_B$$

- **Serie-Parallel-Schaltung**



$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_B$$

- **Parallel-Serie-Schaltung**



$$K = K_A + K_B$$

9.2 Definitionen

Z	$u_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2$ $u_2 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2$	$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$	$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \left.\frac{u_1}{i_1}\right\|_{i_2=0} & \left.\frac{u_1}{i_2}\right\|_{i_1=0} \\ \left.\frac{u_2}{i_1}\right\|_{i_2=0} & \left.\frac{u_2}{i_2}\right\|_{i_1=0} \end{pmatrix}$
Y	$i_1 = y_{11}u_1 + y_{12}u_2$ $i_2 = y_{21}u_1 + y_{22}u_2$	$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$	$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \left.\frac{i_1}{u_1}\right\|_{u_2=0} & \left.\frac{i_1}{u_2}\right\|_{u_1=0} \\ \left.\frac{i_2}{u_1}\right\|_{u_2=0} & \left.\frac{i_2}{u_2}\right\|_{u_1=0} \end{pmatrix}$
H	$u_1 = h_{11}i_1 + h_{12}u_2$ $i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}u_2$	$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$	$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \left.\frac{u_1}{i_1}\right\|_{u_2=0} & \left.\frac{u_1}{u_2}\right\|_{i_1=0} \\ \left.\frac{i_2}{i_1}\right\|_{u_2=0} & \left.\frac{i_2}{u_2}\right\|_{i_1=0} \end{pmatrix}$
K	$i_1 = k_{11}u_1 + k_{12}i_2$ $u_2 = k_{21}u_1 + k_{22}i_2$	$\begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$	$K = \begin{pmatrix} \left.\frac{i_1}{u_1}\right\|_{i_2=0} & \left.\frac{i_1}{i_2}\right\|_{u_1=0} \\ \left.\frac{u_2}{u_1}\right\|_{i_2=0} & \left.\frac{u_2}{i_2}\right\|_{u_1=0} \end{pmatrix}$
A	$u_1 = A_{11}\, u_2 - A_{12}\, i_2$ $i_1 = A_{21}\, u_2 - A_{22}\, i_2$	$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{pmatrix}$	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \left.\frac{u_1}{u_2}\right\|_{i_2=0} & \left.\frac{-u_1}{i_2}\right\|_{u_2=0} \\ \left.\frac{i_1}{u_2}\right\|_{i_2=0} & \left.\frac{-i_1}{i_2}\right\|_{u_2=0} \end{pmatrix}$

9.3 Parameter Umrechnungstabelle

	Z	**Y**	**H**	**K**	**A**
Z	$\begin{matrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{y_{22}}{\Delta y} & \frac{-y_{12}}{\Delta y} \\ \frac{-y_{21}}{\Delta y} & \frac{y_{11}}{\Delta y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta h}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ \frac{-h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{k_{11}} & \frac{-k_{12}}{k_{11}} \\ \frac{k_{21}}{k_{11}} & \frac{\Delta k}{k_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{11}}{A_{21}} & \frac{\Delta A}{A_{21}} \\ \frac{1}{A_{21}} & \frac{A_{22}}{A_{21}} \end{matrix}$
Y	$\begin{matrix} \frac{z_{22}}{\Delta z} & \frac{-z_{12}}{\Delta z} \\ \frac{-z_{21}}{\Delta z} & \frac{z_{11}}{\Delta z} \end{matrix}$	$\begin{matrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & \frac{-h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta h}{h_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta k}{k_{22}} & \frac{k_{12}}{k_{22}} \\ \frac{-k_{21}}{k_{22}} & \frac{1}{k_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{22}}{A_{12}} & \frac{-\Delta A}{A_{12}} \\ \frac{-1}{A_{12}} & \frac{A_{11}}{A_{12}} \end{matrix}$
H	$\begin{matrix} \frac{\Delta z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ \frac{-z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{y_{11}} & \frac{-y_{12}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{11}} & \frac{\Delta y}{y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{k_{22}}{\Delta k} & \frac{-k_{12}}{\Delta k} \\ \frac{-k_{21}}{\Delta k} & \frac{k_{11}}{\Delta k} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{12}}{A_{22}} & \frac{\Delta A}{A_{22}} \\ \frac{-1}{A_{22}} & \frac{A_{21}}{A_{22}} \end{matrix}$
K	$\begin{matrix} \frac{1}{z_{11}} & \frac{-z_{12}}{z_{11}} \\ \frac{z_{21}}{z_{11}} & \frac{\Delta z}{z_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta y}{y_{22}} & \frac{y_{12}}{y_{22}} \\ \frac{-y_{21}}{y_{22}} & \frac{1}{y_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h_{22}}{\Delta h} & \frac{-h_{12}}{\Delta h} \\ \frac{-h_{21}}{\Delta h} & \frac{h_{11}}{\Delta h} \end{matrix}$	$\begin{matrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{21}}{A_{11}} & \frac{-\Delta A}{A_{11}} \\ \frac{1}{A_{11}} & \frac{A_{12}}{A_{11}} \end{matrix}$
A	$\begin{matrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & \frac{\Delta z}{z_{21}} \\ \frac{1}{z_{21}} & \frac{z_{22}}{z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-y_{22}}{y_{21}} & \frac{-1}{y_{21}} \\ \frac{-\Delta y}{y_{21}} & \frac{-y_{11}}{y_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-\Delta h}{h_{21}} & \frac{-h_{11}}{h_{21}} \\ \frac{-h_{22}}{h_{21}} & \frac{-1}{h_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{k_{21}} & \frac{k_{22}}{k_{21}} \\ \frac{k_{11}}{k_{21}} & \frac{\Delta k}{k_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix}$

$\Delta z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$ $\quad$ $\Delta y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$ $\quad$ $\Delta h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$

$\Delta k = k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}$ $\quad$ $\Delta A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$

9.4 Umrechnung von Zweitorparametern in Streumatrizen (und vice versa)

Z: Impedanzparameter
Y: Admitanzparameter
H: Hybridparameter
G: Inverse Hybridparameter
A: Kettenparameter

S: Streuparameter
T: Transmissionsparameter

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$$

S ↔ Z:

$$S_{11} = \frac{(z'_{11}-1)(z'_{22}+1) - z'_{12}\,z'_{21}}{(z'_{11}+1)(z'_{22}+1) - z'_{12}\,z'_{21}} \qquad z'_{11} = \frac{(1+S_{11})(1-S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1-S_{11})(1-S_{22}) - S_{12}S_{21}}$$

$$S_{12} = \frac{2z'_{12}}{(z'_{11}+1)(z'_{22}+1) - z'_{12}\,z'_{21}} \qquad z'_{12} = \frac{2S_{12}}{(1-S_{11})(1-S_{22}) - S_{12}S_{21}}$$

$$S_{21} = \frac{2z'_{21}}{(z'_{11}+1)(z'_{22}+1) - z'_{12}\,z'_{21}} \qquad z'_{21} = \frac{2S_{21}}{(1-S_{11})(1-S_{22}) - S_{12}S_{21}}$$

$$S_{22} = \frac{(z'_{11}+1)(z'_{22}-1) - z'_{12}\,z'_{21}}{(z'_{11}+1)(z'_{22}+1) - z'_{12}\,z'_{21}} \qquad z'_{22} = \frac{(1-S_{11})(1+S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1-S_{11})(1-S_{22}) - S_{12}S_{21}}$$

$$z'_{11} = \frac{z_{11}}{Z_o} \qquad z'_{12} = \frac{z_{12}}{Z_o} \qquad z'_{21} = \frac{z_{21}}{Z_o} \qquad z'_{22} = \frac{z_{22}}{Z_o}$$

S ↔ Y:

$$S_{11} = \frac{(1-y'_{11})(1+y'_{22}) + y'_{12}\,y'_{21}}{(1+y'_{11})(1+y'_{22}) - y'_{12}\,y'_{21}} \qquad y'_{11} = \frac{(1-S_{11})(1+S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1+S_{11})(1+S_{22}) - S_{12}S_{21}}$$

$$S_{12} = \frac{-2y'_{12}}{(1+y'_{11})(1+y'_{22}) - y'_{12}\,y'_{21}} \qquad y'_{12} = \frac{-2S_{12}}{(1+S_{11})(1+S_{22}) - S_{12}S_{21}}$$

$$S_{21} = \frac{-2y'_{21}}{(1+y'_{11})(1+y'_{22}) - y'_{12}\,y'_{21}} \qquad y'_{21} = \frac{-2S_{21}}{(1+S_{11})(1+S_{22}) - S_{12}S_{21}}$$

$$S_{22} = \frac{(1+y'_{11})(1-y'_{22}) + y'_{12}\,y'_{21}}{(1+y'_{11})(1+y'_{22}) - y'_{12}\,y'_{21}} \qquad y'_{22} = \frac{(1+S_{11})(1-S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1+S_{11})(1+S_{22}) - S_{12}S_{21}}$$

$$y'_{11} = y_{11}Z_o \qquad y'_{12} = y_{12}Z_o \qquad y'_{21} = y_{21}Z_o \qquad y'_{22} = y_{22}Z_o$$

S ↔ H:

$$S_{11} = \frac{(h'_{11}-1)(h'_{22}+1)h'_{12}\,h'_{21}}{(h'_{11}+1)(h'_{22}+1)-h'_{12}\,h'_{21}} \qquad h'_{11} = \frac{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}{(1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}S_{21}}$$

$$S_{12} = \frac{2h'_{12}}{(h'_{11}+1)(h'_{22}+1)-h'_{12}\,h'_{21}} \qquad h'_{12} = \frac{2S_{12}}{(1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}S_{21}}$$

$$S_{21} = \frac{-2h'_{21}}{(h'_{11}+1)(h'_{22}+1)-h'_{12}\,h'_{21}} \qquad h'_{21} = \frac{-2S_{21}}{(1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}S_{21}}$$

$$S_{22} = \frac{(1+h'_{11})(1-h'_{22})+h'_{12}\,h'_{21}}{(h'_{11}+1)(h'_{22}+1)-h'_{12}\,h'_{21}} \qquad h'_{22} = \frac{(1-S_{22})(1-S_{11})-S_{12}S_{21}}{(1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}S_{21}}$$

$$h'_{11} = \frac{h_{11}}{Z_o} \qquad h'_{12} = h_{12} \qquad h'_{21} = h_{21} \qquad h'_{22} = h_{22}Z_o$$

S ↔ A:

$$A = \frac{1}{2S_{21}}\begin{bmatrix} (1+S_{11})(1-S_{22})+S_{12}S_{21} & Z_o\left[(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}\right] \\ Y_o\left[(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}\right] & (1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}S_{21} \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{\Delta_1}\begin{bmatrix} A_{11}+A_{12}Y_o-A_{21}Z_o-A_{22} & 2(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}) \\ 2 & -A_{11}+A_{12}Y_o-A_{21}Z_o+A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = A_{11}+A_{12}Y_o+A_{21}Z_o+A_{22}$$

S ↔ T:

$$T = \frac{1}{S_{21}}\begin{bmatrix} 1 & -S_{22} \\ S_{11} & S_{12}S_{21}-S_{11}S_{22} \end{bmatrix} \qquad S = \frac{1}{T_{11}}\begin{bmatrix} T_{21} & T_{11}T_{22}-T_{12}T_{21} \\ 1 & -T_{12} \end{bmatrix}$$

9.5 Umrechnung der y-Parameter zwischen Emitter-, Kollektor- und Basisschaltung

$$y_{11e} = y_{11b} + y_{12b} + y_{21b} + y_{22b} = y_{11c}$$

$$y_{12e} = -\left(y_{12b} + y_{22b}\right) = -\left(y_{11c} + y_{12c}\right)$$

$$y_{21e} = -\left(y_{21b} + y_{22b}\right) = -\left(y_{11c} + y_{21c}\right)$$

$$y_{22e} = y_{22b} = y_{11c} + y_{12c} + y_{21c} + y_{22c}$$

$$y_{11b} = y_{11e} + y_{12e} + y_{21e} + y_{22e} = y_{22c}$$

$$y_{12b} = -\left(y_{12e} + y_{22e}\right) = -\left(y_{21c} + y_{22c}\right)$$

$$y_{21b} = -\left(y_{21e} + y_{22e}\right) = -\left(y_{12c} + y_{22c}\right)$$

$$y_{22b} = y_{22e} = y_{11c} + y_{12c} + y_{21c} + y_{22c}$$

$$y_{11c} = y_{11e} = y_{11b} + y_{12b} + y_{21b} + y_{22b}$$

$$y_{12c} = -\left(y_{11e} + y_{12e}\right) = -\left(y_{11b} + y_{21b}\right)$$

$$y_{21c} = -\left(y_{11e} + y_{21e}\right) = -\left(y_{11b} + y_{12b}\right)$$

$$y_{22c} = y_{11e} + y_{12e} + y_{21e} + y_{22e} = y_{11b}$$

9.6 Umrechnung der h-Parameter der Emitterschaltung in h-Parameter der Basis- und Kollektorschaltung

Emitter- nach Basisschaltung:

$$h_{11b} = \frac{h_{11e}}{Ne} \qquad h_{12b} = \frac{\Delta h_e - h_{12e}}{Ne}$$

$$h_{21b} = \frac{-(\Delta h_e + h_{21e})}{Ne} \qquad h_{22b} = \frac{h_{22e}}{Ne}$$

$$Ne = 1 - h_{12e} + h_{21e} + \Delta h_e$$

$$\Delta h_b = \frac{\Delta h_e}{Ne}$$

Approximationen

$$h_{21e} >> 1 \qquad h_{12e} << 1 \qquad h_{22e} h_{11e} << 1$$

$$h_{11b} \approx \frac{h_{11e}}{h_{21e}} \qquad h_{12b} \approx \frac{\Delta h_e - h_{12e}}{h_{21e}}$$

$$h_{21b} \approx \frac{-h_{21e}}{h_{21e} + 1} \approx -1 \qquad h_{22b} \approx \frac{h_{22e}}{h_{21e}}$$

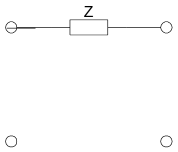
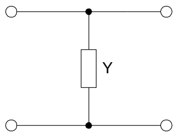
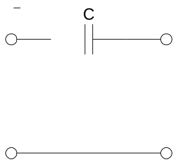
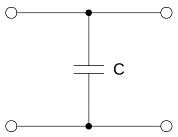
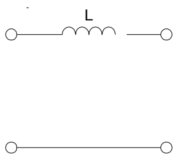
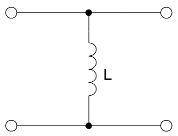
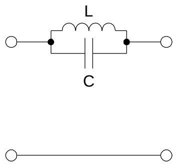
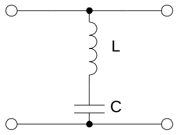
Emitter- nach Kollektorschaltung:

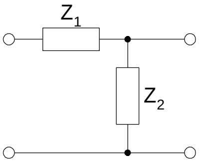
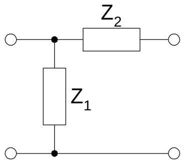
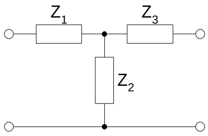
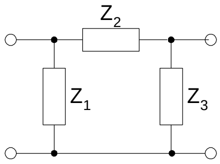
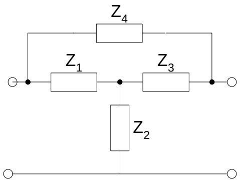
$$h_{11c} = h_{11e} \qquad h_{12c} = 1 - h_{12e}$$

$$h_{21c} = -(1 + h_{21e}) \qquad h_{22c} = h_{22e}$$

$$\Delta h_c = Ne = 1 - h_{12e} + h_{21e} + \Delta h_e$$

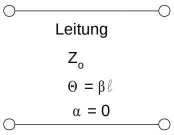
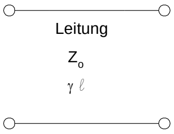
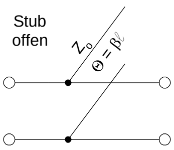
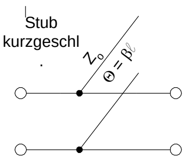
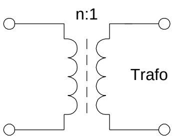
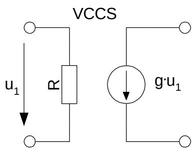
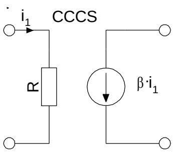
9.7 Zweitorparameter der wichtigsten Elemente

Zweitor	Z	Y	H	K)	A
	nicht definiert	$\begin{matrix} \frac{1}{Z} & -\frac{1}{Z} \\ -\frac{1}{Z} & \frac{1}{Z} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Z & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & Z \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{matrix}$
	$\begin{matrix} \frac{1}{Y} & \frac{1}{Y} \\ \frac{1}{Y} & \frac{1}{Y} \end{matrix}$	nicht definiert	$\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & Y \end{matrix}$	$\begin{matrix} Y & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{matrix}$
	nicht definiert	$\begin{matrix} j\omega C & -j\omega C \\ -j\omega C & j\omega C \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{j\omega C} & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{1}{j\omega C} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & \frac{1}{j\omega C} \\ 0 & 1 \end{matrix}$
	$\begin{matrix} \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \end{matrix}$	nicht definiert	$\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & j\omega C \end{matrix}$	$\begin{matrix} j\omega C & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ j\omega C & 1 \end{matrix}$
	nicht definiert	$\begin{matrix} \frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{j\omega L} \\ -\frac{1}{j\omega L} & \frac{1}{j\omega L} \end{matrix}$	$\begin{matrix} j\omega L & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & j\omega L \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & j\omega L \\ 0 & 1 \end{matrix}$
	$\begin{matrix} j\omega L & j\omega L \\ j\omega L & j\omega L \end{matrix}$	nicht definiert	$\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{j\omega L} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{j\omega L} & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{j\omega L} & 1 \end{matrix}$
	nicht definiert	$\begin{matrix} \frac{1-\omega^2LC}{j\omega L} & \frac{\omega^2LC-1}{j\omega L} \\ \frac{\omega^2LC-1}{j\omega L} & \frac{1-\omega^2LC}{j\omega L} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{j\omega L}{1-\omega^2LC} & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{j\omega C}{1-\omega^2LC} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & \frac{j\omega L}{1-\omega^2LC} \\ 0 & 1 \end{matrix}$
	$\begin{matrix} \frac{1-\omega^2LC}{j\omega C} & \frac{1-\omega^2LC}{j\omega C} \\ \frac{1-\omega^2LC}{j\omega C} & \frac{1-\omega^2LC}{j\omega C} \end{matrix}$	nicht definiert	$\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{j\omega C}{1-\omega^2LC} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{j\omega C}{1-\omega^2LC} & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{j\omega C}{1-\omega^2LC} & 1 \end{matrix}$

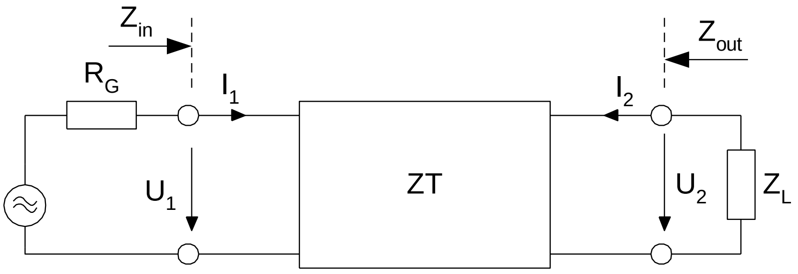
Zweitor	Z	Y	H	K	A
	$\begin{pmatrix} Z_1+Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{Z_1} & \frac{-1}{Z_1} \\ \frac{-1}{Z_1} & \frac{Z_1+Z_2}{Z_1Z_2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Z_1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{Z_2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{Z_1+Z_2} & \frac{-Z_2}{Z_1+Z_2} \\ \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} & \frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{Z_1+Z_2}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_1 \\ Z_1 & Z_1+Z_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{Z_1+Z_2}{Z_1Z_2} & \frac{-1}{Z_2} \\ \frac{-1}{Z_2} & \frac{1}{Z_2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2} & \frac{Z_1}{Z_1+Z_2} \\ \frac{-Z_1}{Z_1+Z_2} & \frac{1}{Z_1+Z_2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{Z_1} & -1 \\ 1 & Z_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & Z_2 \\ \frac{1}{Z_1} & \frac{Z_1+Z_2}{Z_1} \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} Z_1+Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2+Z_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{Z_2+Z_3}{P} & \frac{-Z_2}{P} \\ \frac{-Z_2}{P} & \frac{Z_1+Z_2}{P} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{P}{Z_2+Z_3} & \frac{Z_2}{Z_2+Z_3} \\ \frac{-Z_2}{Z_2+Z_3} & \frac{1}{Z_2+Z_3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{Z_1+Z_2} & \frac{-Z_2}{Z_1+Z_2} \\ \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} & \frac{P}{Z_1+Z_2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{Z_1+Z_2}{Z_2} & \frac{P}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} & \frac{Z_2+Z_3}{Z_2} \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} \frac{L\cdot Z_1}{M} & \frac{Z_1Z_3}{M} \\ \frac{Z_1Z_3}{M} & \frac{K\cdot Z_3}{M} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{Z_1+Z_2}{Z_1Z_2} & \frac{-1}{Z_2} \\ \frac{-1}{Z_2} & \frac{Z_2+Z_3}{Z_2Z_3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{Z_1Z_2}{K} & \frac{Z_1}{K} \\ \frac{-Z_1}{K} & \frac{M}{K\cdot Z_3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{M}{L\cdot Z_1} & \frac{-Z_3}{L} \\ \frac{Z_3}{L} & \frac{Z_2Z_3}{L} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{Z_2+Z_3}{Z_3} & Z_2 \\ \frac{M}{Z_1Z_3} & \frac{Z_1+Z_2}{Z_1} \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} \frac{R}{N} & \frac{Q}{N} \\ \frac{Q}{N} & \frac{S}{N} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{L}{P}+\frac{1}{Z_4} & \frac{-Z_2}{P}-\frac{1}{Z_4} \\ \frac{-Z_2}{P}-\frac{1}{Z_4} & \frac{K}{P}+\frac{1}{Z_4} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{PZ_4}{S} & \frac{Q}{S} \\ \frac{-Q}{S} & \frac{N}{S} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{N}{R} & \frac{-Q}{R} \\ \frac{Q}{R} & \frac{PZ_4}{R} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{R}{Q} & \frac{PZ_4}{Q} \\ \frac{N}{Q} & \frac{S}{Q} \end{pmatrix}$

$$K = Z_1 + Z_2$$
$$L = Z_2 + Z_3$$
$$M = Z_1 + Z_2 + Z_3$$
$$N = Z_1 + Z_3 + Z_4$$

$$P = Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3$$
$$Q = Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3 + Z_2Z_4 = P + Z_2Z_4$$
$$R = Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3 + Z_2Z_4 + Z_1Z_4 = Q + Z_1Z_4$$
$$S = Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3 + Z_2Z_4 + Z_3Z_4 = Q + Z_3Z_4$$

Zweitor	Z	Y	H	K	A
					$\begin{matrix} \cos\Theta & jZ_o \sin\Theta \\ \dfrac{j\sin\Theta}{Z_o} & \cos\Theta \end{matrix}$
					$\begin{matrix} \cosh\gamma\ell & Z_o \sinh\gamma\ell \\ \dfrac{\sinh\gamma\ell}{Z_o} & \cosh\gamma\ell \end{matrix}$
					$\begin{matrix} 1 & 0 \\ \dfrac{j\tan\Theta}{Z_o} & 1 \end{matrix}$
					$\begin{matrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\cot\Theta}{jZ_o} & 1 \end{matrix}$
	nicht definiert	nicht definiert	$\begin{matrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -\dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{n} & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} n & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{n} \end{matrix}$
	nicht definiert				$\begin{matrix} 0 & -\dfrac{1}{g} \\ 0 & -\dfrac{1}{R\cdot g} \end{matrix}$
	nicht definiert				$\begin{matrix} 0 & -\dfrac{R}{\beta} \\ 0 & -\dfrac{1}{\beta} \end{matrix}$

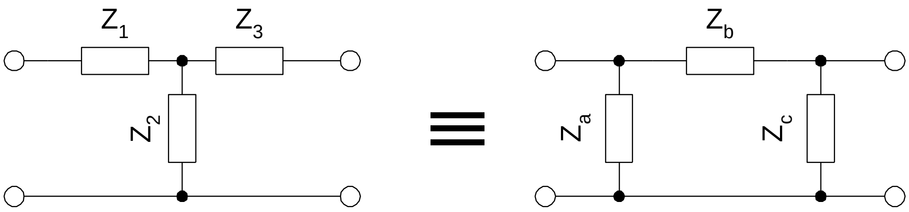
9.8 Beschalteter Zweitor



	Z	Y	H	K	A
$v_U = \frac{u_2}{u_1}$	$\frac{z_{21}Z_L}{z_{11}Z_L + \Delta z}$	$\frac{-y_{21}Z_L}{y_{22}Z_L + 1}$	$\frac{-h_{21}Z_L}{h_{11} + \Delta h Z_L}$	$\frac{k_{21}Z_L}{k_{22} + Z_L}$	$\frac{Z_L}{A_{12} + A_{11}Z_L}$
$v_i = \frac{i_2}{i_1}$	$\frac{-z_{21}}{z_{22} + Z_L}$	$\frac{y_{21}}{y_{11} + \Delta y Z_L}$	$\frac{h_{21}}{1 + h_{22}Z_L}$	$\frac{-k_{21}}{k_{11}Z_L + \Delta k}$	$\frac{-1}{A_{21}Z_L + A_{22}}$
$v_p = \frac{P_2}{P_1}$			H, R_L = reell $\frac{h_{21}{}^2 R_L}{(1 + h_{22}R_L)(h_{11} + \Delta h R_L)}$		$v_u{}^2 \frac{Re[Z_{in}]}{Re[Z_L]}$
$Z_{in} = \frac{u_1}{i_1}$	$\frac{z_{11}Z_L + \Delta z}{z_{22} + Z_L}$ $= z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + Z_L}$	$\frac{1 + y_{22}Z_L}{y_{11} + \Delta y Z_L}$	$\frac{h_{11} + \Delta h Z_L}{1 + h_{22}Z_L}$	$\frac{k_{22} + Z_L}{k_{11}Z_L + \Delta k}$	$\frac{A_{11}Z_L + A_{12}}{A_{21}Z_L + A_{22}}$
Z_{out}	$\frac{z_{22}Z_G + \Delta z}{z_{11} + Z_G}$ $= z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_G}$	$\frac{1 + y_{11}Z_G}{y_{22} + \Delta y Z_G}$	$\frac{h_{11} + Z_G}{h_{22}Z_G + \Delta h}$	$\frac{k_{22} + Z_G \Delta k}{1 + k_{11}Z_G}$	$\frac{A_{22}Z_G + A_{12}}{A_{21}Z_G + A_{11}}$

10 Netzwerke

10.1 Transformation von Pi- $\leftrightarrow$ T-Schaltungen



Pi- oder T-Schaltungen lassen sich leicht von einer Topologie in die andere transformieren.

Sind die Elemente frequenzabhängig, gilt die Transformation nur für eine Frequenz.

10.1.1 Pi $\rightarrow$ T

$$Z_1 = \frac{Z_a Z_b}{D}$$

$$Z_2 = \frac{Z_a Z_c}{D} \qquad D = Z_a + Z_b + Z_c$$

$$D \neq 0$$

$$Z_3 = \frac{Z_b Z_c}{D}$$

10.1.2 T $\rightarrow$ Pi

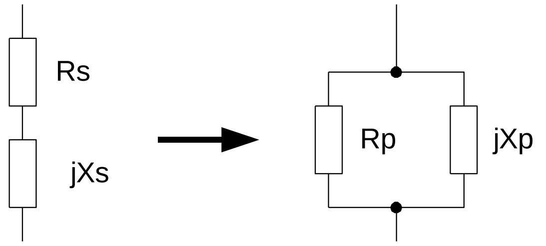
$$Z_a = \frac{N}{Z_3}$$

$$Z_b = \frac{N}{Z_2} \qquad N = Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3$$

$$Z_c = \frac{N}{Z_1}$$

10.2 Umwandlung Serie ↔ Parallel

10.2.1 Serie → Parallel

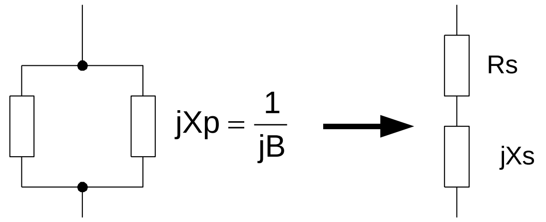


$$R_p = \frac{1}{G} = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s}$$

$$jX_p = \frac{1}{jB} = j\frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s}$$

10.2.2 Parallel → Serie

$R_p = \frac{1}{G}$



$jXp = \frac{1}{jB}$

$$R_s = \frac{R_p X_p^2}{R_p^2 + X_p^2}$$

$$jX_s = j\frac{X_p R_p^2}{R_p^2 + X_p^2}$$

$$Q = \frac{|X_s|}{R_s} = \frac{R_p}{|X_p|}$$

$$R_s = \frac{R_p}{Q^2 + 1}$$

$$R_p = \left(Q^2 + 1\right) R_s$$

$$|X_s| = R_s Q$$

$$|X_p| = \frac{R_p}{Q}$$

<u>Für Q > 10:</u>

$$R_s \approx \frac{R_p}{Q^2}$$

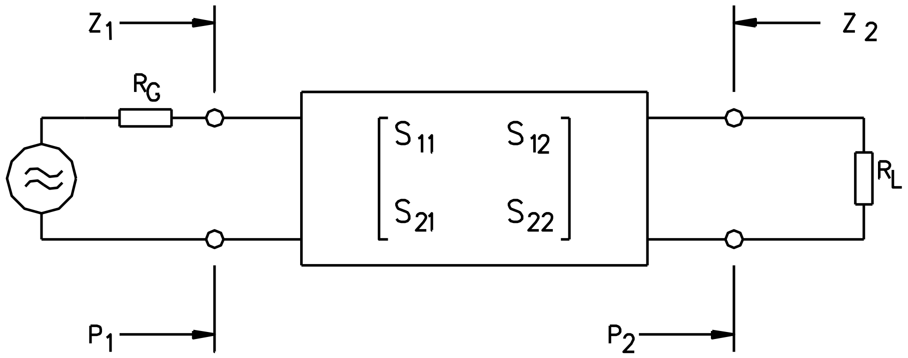
$$R_p \approx Q^2 R_s$$

$$|X_s| \approx |X_p|$$

$$|X_p| \approx |X_s|$$

10.3 DÄMPFUNGSGLIEDER

(Pad)



$$a\,dB = 10\log\frac{P_1}{P_2} = 10\log D = -20\log S_{21}$$

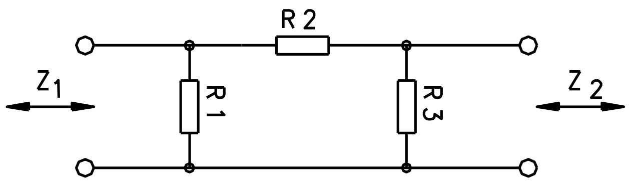
für $R_G = Z_1$ und $R_L = Z_2$

$$D = \frac{P_1}{P_2}$$

für Z_1 nicht gleich Z_0 gilt:

$$D_{min} = \frac{2Z_1}{Z_2} - 1 + 2\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}\left(\frac{Z_1}{Z_2} - 1\right)}$$

10.3.1 PI-Glieder



PI-Glied

Für unsymmetrische PI-Glieder gelten bei $\mathbf{Z_1 > Z_2}$ folgende Gleichungen:

$$R_1 = \frac{(D-1)Z_1\sqrt{Z_2}}{(D+1)\sqrt{Z_2} - 2\sqrt{DZ_1}}$$

$$R_2 = \frac{D-1}{2}\sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{D}}$$

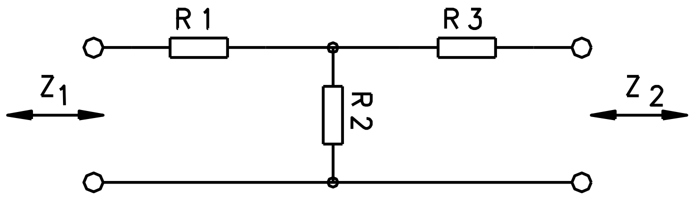
$$R_3 = \frac{(D-1)Z_2\sqrt{Z_1}}{(D+1)\sqrt{Z_1} - 2\sqrt{DZ_2}}$$

und für **$Z_1 = Z_2$**:

$$R_1 = R_3 = Z_1 \frac{\sqrt{D}+1}{\sqrt{D}-1}$$

$$R_2 = \frac{Z_1(D-1)}{2\sqrt{D}}$$

10.3.2 T-Glieder



T-Glied

Für unsymmetrische T-Glieder gelten bei **$Z_1 > Z_2$** folgende Gleichungen:

$$R_1 = \frac{Z_1(D+1) - 2\sqrt{DZ_1Z_2}}{D-1}$$

$$R_2 = \frac{2 \cdot \sqrt{D \cdot Z_1Z_2}}{D-1}$$

$$R_3 = \frac{Z_2(D+1) - 2\sqrt{DZ_1Z_2}}{D-1}$$

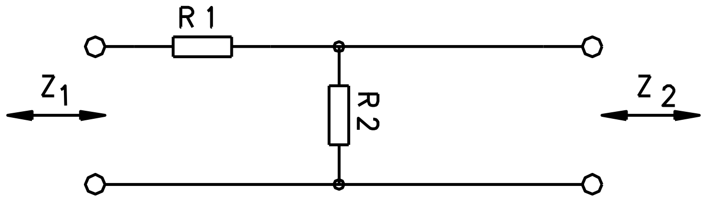
und für **$Z_1 = Z_2$**:

$$R_1 = R_3 = Z_1 \frac{\sqrt{D}-1}{\sqrt{D}+1}$$

$$R_2 = \frac{2Z_1\sqrt{D}}{D-1}$$

10.3.3 Minimum Loss Pad (MLP)

Wenn D_{min} verwendet werden soll, so wird beim T-Glied $R_1 = 0$ und beim PI-Glied $R_3 = \infty$.



Minimum Loss Pad

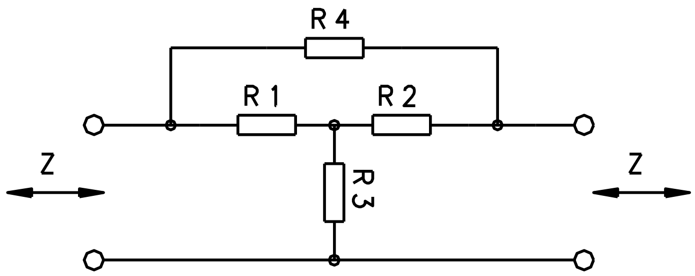
Für $\mathbf{Z_1 > Z_2}$:

$$R_1 = Z_1\sqrt{1-\frac{Z_2}{Z_1}}$$

$$R_2 = \frac{Z_2}{\sqrt{1-\frac{Z_2}{Z_1}}}$$

$$D = \left(\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} + \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}-1}\right)^2$$

10.3.4 Überbrücktes T-Glied



Überbrücktes T-Glied

$$R_1 = R_2 = Z$$

$$R_4 = Z\left(\sqrt{D}-1\right)$$

$$R_3 = \frac{Z}{\sqrt{D}-1}$$

11 Intermodulation

Wenn die Nichtlinearität der Uebertragungsfunktion klein ist, kann die Übertragungsfunktion mit einem Polynom dargestellt werden:

$$u_2(t) = k_1 u_1(t) + k_2\, u_1(t)^{\,2} + k_3\, u_1(t)^{\,3} + \ldots\ldots + k_n\, u_1(t)^{\,n} \qquad \text{IM1.1}$$

Wird der Zweitor mit zwei Signalen der Frequenzen f_1 und f_2 ausgesteuert, so gilt

$$u_1(t) = A_1 \cos\omega_1 t + A_2 \cos\omega_2 t \qquad \text{IM1.2}$$

Wenn ω_1 und ω_2 nahe beieinander liegen, kann k_i für beide Signale gleich angenommen werden.

Für Gleichung IM1.1 gilt dann

$$u_2(t) = k_1(A_1\cos\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t) + k_2(A_1\cos\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t)^2 + k_3(A_1\cos\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t)^3 \qquad \text{IM1.3}$$

Mit den Beziehungen

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^3\alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3\cos\alpha}{4}$$

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 = \frac{\cos(\alpha_1-\alpha_2)+\cos(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$$

erhält man schliesslich:

$$\begin{aligned}
u_2(t) = {} & k_1(A_1\cos\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t) \\
& + k_2\left[A_1^{\,2}\frac{1+\cos 2\omega_1 t}{2} + A_2^{\,2}\frac{1+\cos 2\omega_2 t}{2} + A_1A_2\ \cos\{(\omega_1+\omega_2)t\} + \cos\{(\omega_1-\omega_2)t\}\ \right] \\
& + k_3\left\{\left[A_1^{\,3}\left(\frac{\cos\omega_1 t}{2} + \frac{\cos\omega_1 t}{4} + \frac{\cos 3\omega_1 t}{4}\right) + A_2^{\,3}\left(\frac{3\cos\omega_2 t}{4} + \frac{\cos 3\omega_2 t}{4}\right)\right]\right. \\
& + A_1^{\,2}A_2\left[\frac{3\cos\omega_2 t}{2} + \frac{3\cos\{(2\omega_1+\omega_2)t\}}{4} + \frac{3\cos\{(2\omega_1-\omega_2)t\}}{4}\right] \\
& \left. + A_2^{\,2}A_1\left[\frac{3\cos\omega_1 t}{2} + \frac{3\cos\{(2\omega_2+\omega_1)t\}}{4} + \frac{3\cos\{(2\omega_2-\omega_1)t\}}{4}\right]\right\}
\end{aligned}$$

oder aufgegliedert nach Frequenzkomponenten

1. Ordnung

$$\left(k_1A_1 + \frac{3}{4}k_3A_1^{\,3} + \frac{3}{2}k_3A_1A_2^{\,2}\right)\cos\omega_1 t$$

$$\left(k_1A_2 \;+ \frac{3}{4}k_3A_2^{\,3} + \frac{3}{2}k_3A_1^{\,2}A_2\right)\cos\omega_2 t$$

2. Ordnung

$$(k_2A_1A_2)\cos(\omega_1 \pm \omega_2)t$$

$$\left(\frac{1}{2}k_2A_1^{\,2}\right)\cos 2\omega_1 t$$

$$\left(\frac{1}{2}k_2A_2^{\,2}\right)\cos 2\omega_2 t$$

3. Ordnung

$$\left(\frac{3}{4}k_3A_1^{\,2}A_2\right)\cos(2\omega_1 \pm \omega_2)t$$

$$\left(\frac{3}{4}k_3A_1A_2^{\,2}\right)\cos(2\omega_2 \pm \omega_1)t$$

$$\left(\frac{1}{4}k_3A_1^{\,3}\right)\cos 3\omega_1 t$$

$$\left(\frac{1}{4}k_3A_2^{\,3}\right)\cos 3\omega_2 t$$

Es sind also 11 neue Frequenzen entstanden:

2. Ordnung

$f_1 + f_2$	
$f_1 - f_2$	Mischprodukte, IM 2. Ordnung
$f_2 - f_1$	
$2f_1$	
$2f_2$	Oberwellen

3. Ordnung

$2f_1 + f_2$	
$2f_1 - f_2$	Intermodulation 3. Ordnung
$2f_2 + f_1$	
$2f_2 - f_1$	
$3f_1$	
$3f_2$	Oberwellen

Bei den **Intermodulationsprodukten** ist überall k_3, d.h. der **kubische** Anteil der Übertragungsfunktion, beteiligt.

Bei den **Mischprodukten** ist überall k_2, d.h. der **quadratische** Anteil der Übertragungsfunktion, beteiligt.

Daraus kann geschlossen werden:

Mischer sollten möglichst ideale quadratische Kennlinien aufweisen.

Verstärker sollten möglichst keine kubischen Kennlinienanteile aufweisen.

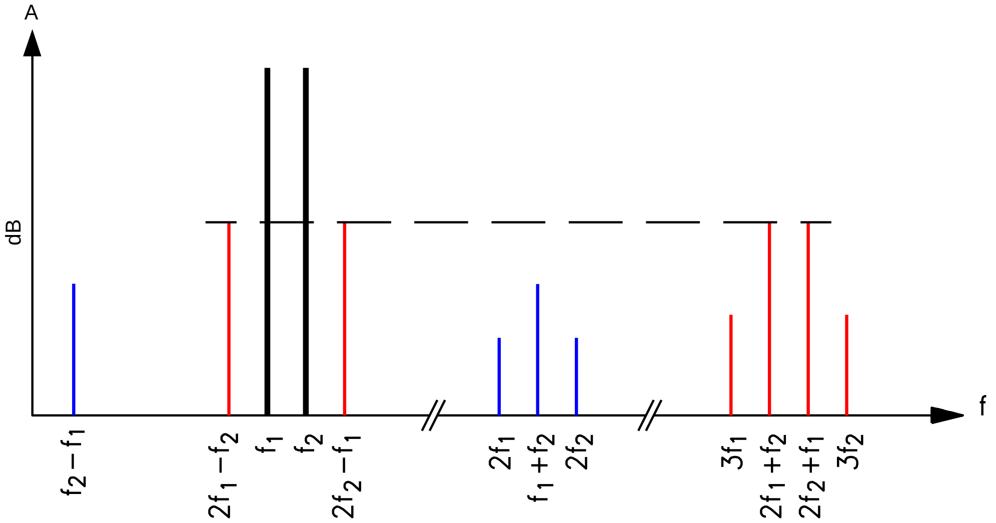
Aus den Gleichungen IM1.5 - 7 können auch die Amplitudenverhältnisse berechnet werden.

Beispiel:

$$\frac{A_{f_1+f_2}}{A_{2f_1}}$$

für $A_1 = A_2$

Auf diese Weise kann auch bewiesen werden, dass die Amplituden der Produkte $2f_1$-f_2, $2f_2$-f_1, $2f_1$+f_2 und $2f_2$+f_1 gleich gross sind.

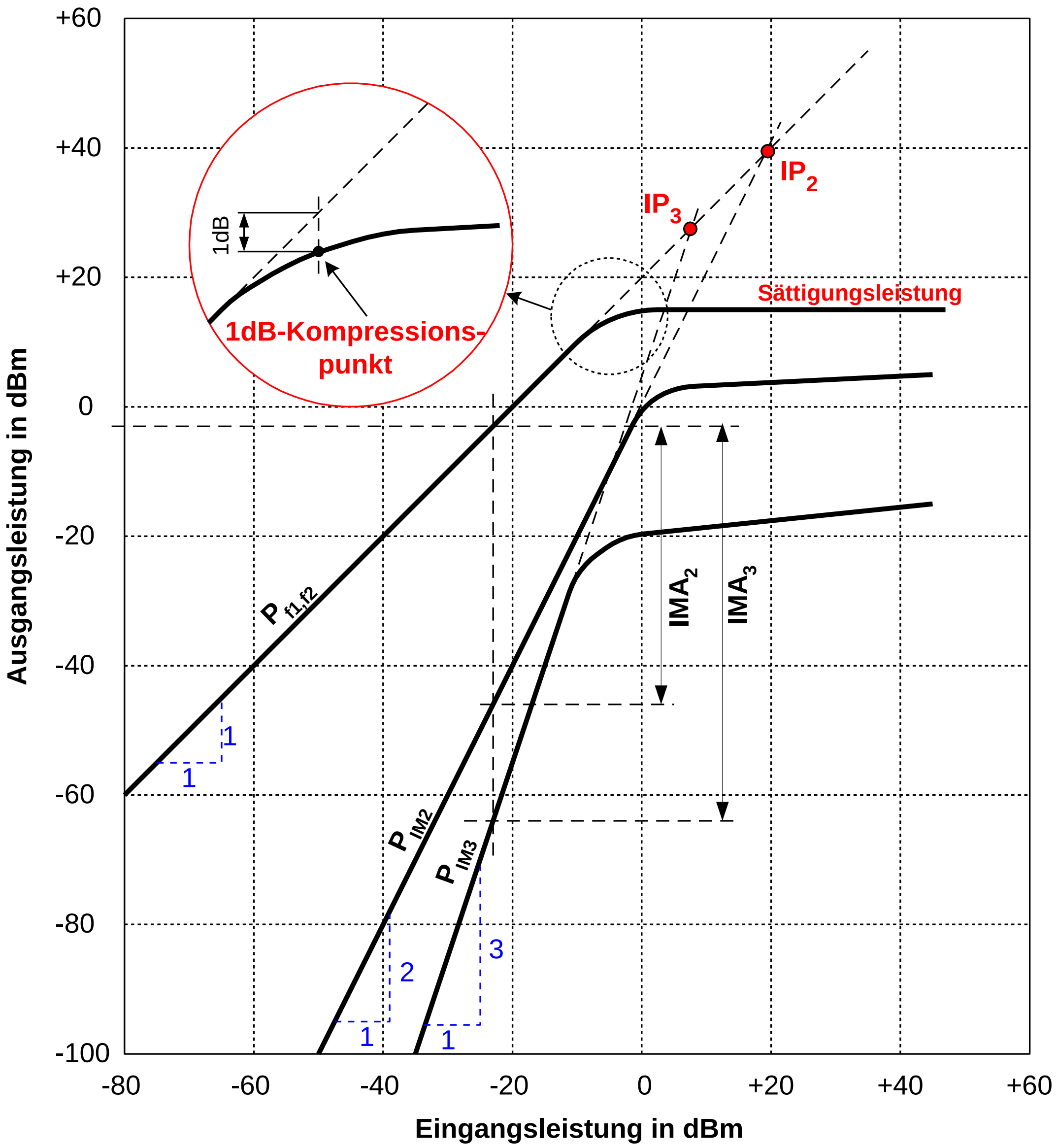


Intermodulationsprodukte 2. und 3. Ordnung

11.1 Intercept Punkt

Der Intercept-Punkt n-ter Ordnung (IP_n) ist diejenige Leistung, bei der die Nutzsignale die gleiche Leistung aufweisen, wie die IM-Produkte n-ter Ordnung.

Dieser Punkt kann nur theoretisch ermittelt werden, weil er bei Leistungen liegt, bei denen der Zweitor längst in Sättigung betrieben wird.



Für $A_1 = A_2$ ($P_{f1} = P_{f2}$) ist aus den Gleichungen IM1.5 und IM1.7 ersichtlich, dass die Amplituden der IM_2-Produkte mit der Potenz 2 und die IM_3-Produkte mit der Potenz 3 der Amplituden der Nutzsignale verknüpft sind.

Dies bedeutet, dass bei einer Pegeländerung der Nutzfrequenzen um 1 dB, die Pegel der IM_2-Produkte um 2 dB und die Pegel der IM_3-Produkte um 3 dB ändern.

Diese Zusammenhänge führen zu den Gleichungen

$$OIP_2 = P_{out} + IMA_2$$

alle Leistungen in dBm

$$OIP_3 = P_{out} + \frac{IMA_3}{2}$$

alle Leistungen in dBm

oder allgemein

$$OIP_n = P_{out} + \frac{IMA_n}{n-1}$$

alle Leistungen in dBm

OIP_n = Output Intercept Punkt n-ter Ordnung, dBm

P_{out} = Ausgangsleistung der Nutzsignale, dBm

IMA_n = Intermodulationsabstand der Produkte n-ter Ordnung, dB

In vielen Fällen wird der IP auf den Eingang des Zweitors bezogen (Empfänger, Mischer, etc).

Es gilt

$$IIP_n = OIP_n - v$$

IIP_n = Input Intercept Punkt n-ter Ordnung, dBm
v = Verstärkung der Zweitors, dB

Analog zu IM1.1.3 gilt

$$IIP_n = P_{in} + \frac{IMA_n}{n-1}$$

alle Leistungen in dBm

$$OIP_n = \frac{n \cdot P_{out} - P_{IM_n}}{n-1}$$

alle Leistungen in dBm

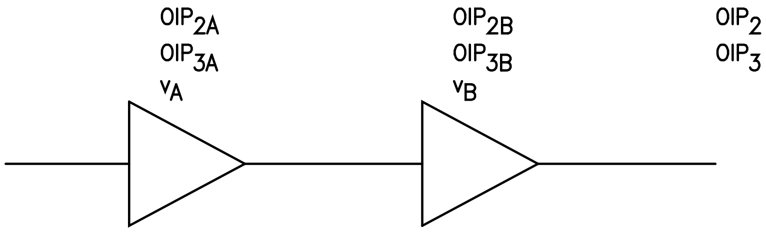
und auf den Eingang bezogen

$$IIP_n = \frac{n \cdot P_{in} - P_{IM_n}}{n-1}$$

alle Leistungen in dBm

11.2 Intercept Punkt kaskadierter Zweitore

Bei **<u>Bezug auf den Ausgang</u>** gilt:



2. Ordnung:

$$P_{OIP_2} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt{v_B \cdot P_{OIP_{2A}}}} + \frac{1}{\sqrt{P_{OIP_{2B}}}}\right]^2}$$

alle Leistungen in mW, Verstärkung als Leistungsverhältnis

P_{OIP2} = Ausgangs Intercept-Punkt 2. Ordnung der kaskadierten Schaltung, mW

P_{OIP2A} = Ausgangs Intercept-Punkt 2. Ordnung des 1. Verstärkers, mW

P_{OIP2B} = Ausgangs Intercept-Punkt 2. Ordnung des 2. Verstärkers, mW

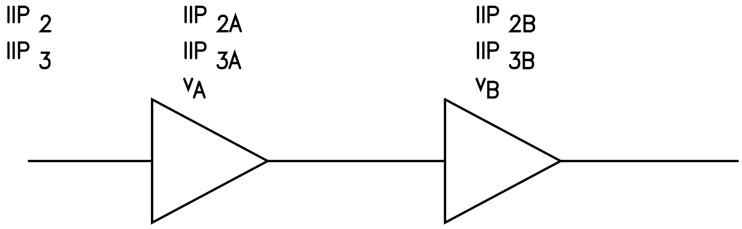
v_B = Leistungsverstärkung der 2. Stufe, Verhältnis

3. Ordnung:

$$P_{OIP_3} = \frac{1}{\frac{1}{v_B \cdot P_{OIP_{3A}}} + \frac{1}{P_{OIP_{3B}}}}$$

alle Leistungen in mW, Verstärkung als Leistungsverhältnis

Bei **Bezug auf den Eingang** gilt:



2. Ordnung:

$$P_{IIP_2} = \frac{1}{\left[\sqrt{\frac{1}{P_{IIP_{2A}}}} + \sqrt{\frac{v_A}{P_{IIP_{2B}}}}\right]^2}$$

alle Leistungen in mW, Verstärkung als Leistungsverhältnis

3. Ordnung:

$$P_{IIP_3} = \frac{1}{\frac{1}{P_{IIP_{3A}}} + \frac{v_A}{P_{IIP_{3B}}}}$$

-

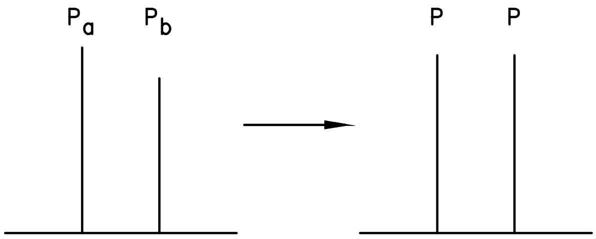
alle Leistungen in mW, Verstärkung als Leistungsverhältnis

11.3 Messignale ungleicher Amplituden

Für die Messung des Intercept-Punktes werden normalerweise zwei Signale gleicher Amplitude verwendet, wie in den bisherigen Betrachtungen immer angenommen wurde.

Für spezielle Anwendungen wie z.B. Fernsehsender, Breitband Kabelfernsehanlagen, etc. werden die Signalamplituden der Anwendung angepasst und es werden zwei oder drei Signale verschiedener Amplituden verwendet.

Diese Signale können in äquivalente Signale gleicher Amplituden umgerechnet werden:



IM 2. Ordnung:

$$P = \sqrt{P_a \cdot P_b}$$

IM 3. Ordnung:

$$P = \sqrt[3]{P_a^{\,2} \cdot P_b}$$ $P_a > P_b$

oder bei 3 Signalen

$$P = \sqrt[3]{P_a \cdot P_b \cdot P_c}$$

alle Leistungen in mW

12 Dynamikbereich

Die **untere Grenze** wird durch das Rauschmass NF bestimmt. Auf den Eingang bezogen ergibt sich eine Rauschleistung von

$$P_{N1}\ \mathrm{dBm} = -174\ \mathrm{dBm} + 10\log\frac{B}{1\mathrm{Hz}}\ \mathrm{dB} + NF\ \mathrm{dB}$$

Die **obere Grenze** ist je nach Anwendung erreicht, wenn

a) Die Intermodulationsprodukte die gleiche Leistung aufweisen, wie die Rauschleistung

b) Die Intermodulationsprodukte einen bestimmten, störenden Wert erreichen, z.B. beim Fernsehen die Sichtbarkeitsgrenze

c) Der Zweitor in stark nichtlineares Verhalten übergeht, z.B. 1dB-Kompressionspunkt

Für die meisten Anwendungen ist die Grenze nach a) massgebend. In diesem Falle wird der Bereich zwischen unterer und oberer Grenze "Intermodulationsfreier Dynamikbereich" DR_{IM} genannt.

Es gilt dann:

$$DR_{IM}\ \mathrm{dB} = P_{max}\ \mathrm{dBm} - P_{N1}\ \mathrm{dBm}$$

$$\boxed{DR_{IM} = \left(\frac{P_{IIP_3}}{P_{N1}}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

in logarithmischer Darstellung:

$$\boxed{DR_{IM}\ \mathrm{dB} = \frac{2}{3}\left(IIP_3\ \mathrm{dBm} - P_{N1}\ \mathrm{dBm}\right)}$$

oder

$$\boxed{P_{in_{max}}\ \mathrm{dBm} = \frac{1}{3}\left(2\cdot IIP_3\ \mathrm{dBm} + P_{N1}\ \mathrm{dBm}\right)}$$

13 Freiraumausbreitung

13.1 Elektromagnetisches Feld

Im Fernfeld einer Antenne (d>4λ) stehen elektrische und magnetische Komponente des Feldes senkrecht aufeinander und liegen in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

Senkrecht auf dieser Ebene ist der „Poyntingsche Vektor" $\vec{S}$ in Ausbreitungsrichtung definiert und stellt das Vektorprodukt aus $\vec{E}$ und $\vec{H}$ dar:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$\vec{S} =$ Poyntingscher Vektor
$\vec{E} =$ elektrischer Feldvektor
$\vec{H} =$ magnetischer Feldvektor

$\vec{S}$ wird auch als **Leistungsdichte** bezeichnet und stellt die Leistung pro Flächeneinheit dar.

Bei Betrachtung der stationären Welle in der Ebene können die Vektorprodukte als normale Produkte der Betragsgrössen geschrieben werden:

$$S = \left|\vec{S}\right| = \left|\vec{E}\right| \cdot \left|\vec{H}\right| = E \cdot H$$

$S =$ Leistungsdichte in $\frac{W}{m^2}$
$E =$ elektrische Feldstärke in $\frac{V}{m}$
$H =$ magnetische Feldstärke in $\frac{A}{m}$

In der Praxis wird S verwendet, um Grenzwerte für die Belastung des Menschen im Bereich strahlender Antennen festzulegen.

Für das Fernfeld ist die Impedanz des freien Raumes, der Feldwellenwiderstand:

$$Z_F = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}} = 120 \cdot \pi\ \Omega$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) erhält man:

$$S = E \cdot H = \frac{E^2}{Z_F}$$

Verwenden wir als Sendeantenne einen isotropen Kugelstrahler, d.h. eine theoretische, punktförmige Antenne, die die zugeführte Leistung gleichmässig in den kugelförmigen Raum abstrahlt, so erzeugt diese Antenne im Abstand d die Leistungsdichte

$$S = \frac{P_s}{A} = \frac{P_s}{4\pi d^2}$$

$P_s = \text{Sendeleistung}$

$A = \text{Kugeloberfläche}$

$d = \text{Radius}$

Wird als Antenne nicht ein isotroper Kugelstrahler, sondern eine Antenne, die bezogen auf den Kugelstrahler den Gewinn G_s aufweist verwendet, so ist die Leistungsdichte

$$\boxed{S = \frac{P_s G_s}{4\pi d^2}}$$

Das Produkt $P_s G_s$ wird als **E**quivalent **I**sotropic **R**adiated **P**ower EIRP bezeichent.

$$P_s G_s = \text{EIRP}$$

In vielen Fällen wird als Referenzantenne der λ/2-Dipol verwendet. Der Halbwellendipol hat gegenüber dem isotropen Strahler einen Gewinn von 1.64 (2.14 dB). Bei Bezug des Antennengewinnes auf den Halbwellendipol wird das Produkt $P_s G_{sD}$ als Effectiv Radiated Power ERP bezeichnet.

$$P_s G_{sD} = \text{ERP}$$

G_{sD} = Antennengewinn bezogen auf Halbwellenstrahler

Wird eine Empfangsantenne in ein elektromagnetisches Feld gestellt, so wird von ihr folgende Leistung aufgenommen (Empfangssituation):

$$P_e = S \cdot A_e$$

P_e = Empfangsleistung

A_e = Wirkfläche der Empfangsantenne

$$A_e = \frac{\lambda^2 G_e}{4\pi}$$

λ =Wellenlänge

G_e =Gewinn der Empfangsantenne (isotrop)

Aus 5), 8) und 9) erhalten wir die Empfangsleistung zu

$$P_e = S \cdot A_e = \frac{P_s G_s}{4\pi d^2} \cdot \frac{\lambda^2 G_e}{4\pi} = \frac{P_s G_s G_e \lambda^2}{(4\pi)^2 d^2}$$

13.2 Freiraumdämpfung

Die Freiraumdämpfung (Free Space Loss FSL) a_{FSL} erhalten wir

$$a_{FSL} = \frac{P_s}{P_e} = \frac{(4\pi)^2 d^2}{G_s G_e \lambda^2}$$

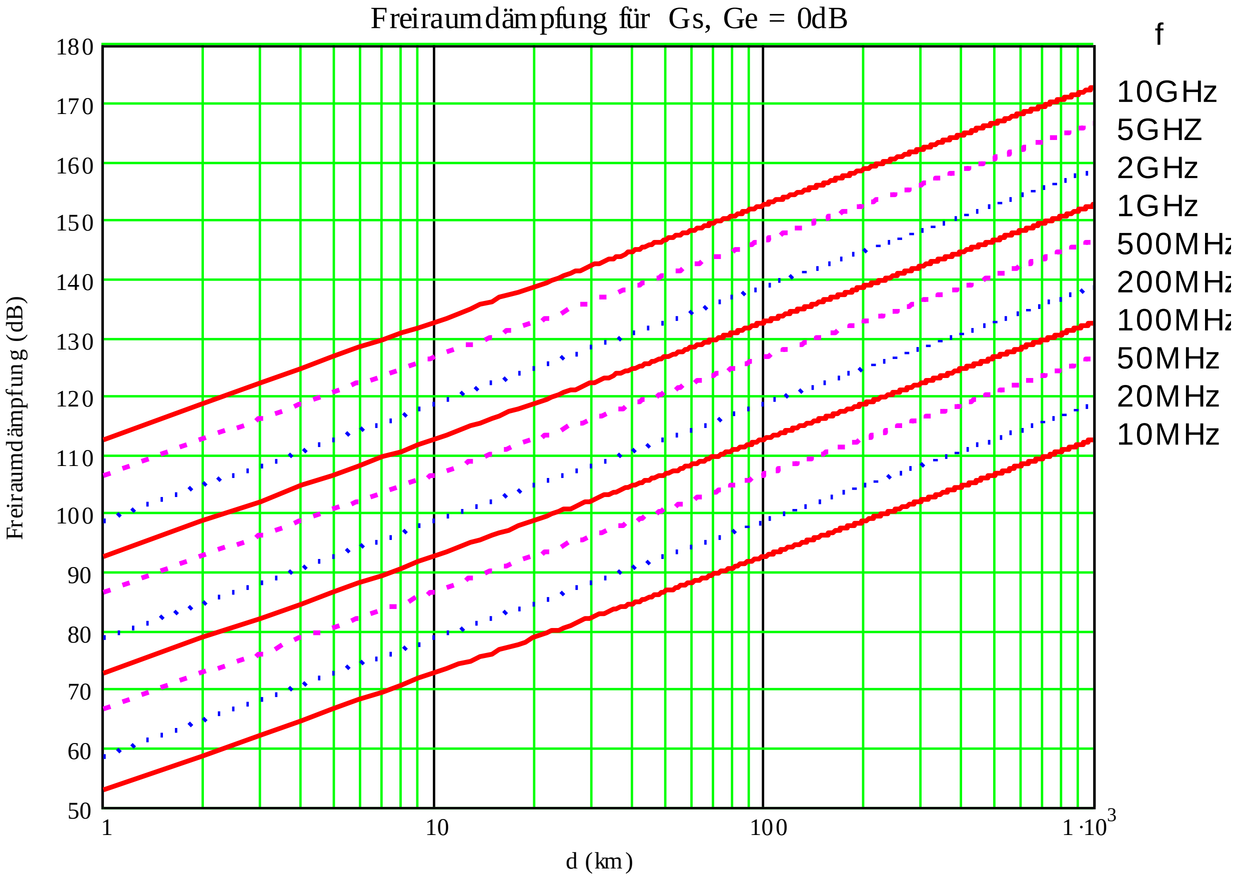
mit $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \ m \cdot s^{-1}}{f}$

$$a_{FSL} = \frac{(4\pi)^2 d^2 \ f^2}{G_s G_e \left(3 \cdot 10^8\right)^2}$$

Diese Gleichung kann auch als zugeschnittene Grössengleichung in logarithmischer Form geschrieben werden:

$$a_{FSL} / dB = 10\log\left(\frac{P_s}{P_e}\right) = 32.45 + 20\log\left(\frac{d}{km}\right) + 20\log\left(\frac{f}{MHz}\right) - 10\log(G_s) - 10\log(G_e)$$

G_s, G_e bezogen auf isotropen Strahler


Freiraumdämpfung für Gs, Ge = 0dB
f
10GHz
5GHZ
2GHz
1GHz
500MHz
200MHz
100MHz
50MHz
20MHz
10MHz
Freiraumdämpfung (dB)
180
170
160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
1
10
100
$1 \cdot 10^3$
d (km)

13.3 Bestimmung der Feldstärke

Aus den Gleichungen 2), 3) und 5) erhalten wir

$$E^2 = \frac{P_s G_s 2\pi \cdot 60\Omega}{4\pi d^2} = \frac{P_s G_s 30\Omega}{d^2}$$

oder

$$\boxed{E = \frac{\sqrt{P_s G_s 30\Omega}}{d} = \frac{\sqrt{EIRP \cdot 30\Omega}}{d} = \frac{\sqrt{EIRP} \cdot 5.477\sqrt{\Omega}}{d}}$$

Bezieht man den **Antennengewinn auf den λ/2-Dipol (** G_{sD} **)** so erhält man:

$$\boxed{E = \frac{\sqrt{P_s G_{sD} \cdot 1.64 \cdot 30\Omega}}{d} = \frac{\sqrt{ERP \cdot 1.64 \cdot 30\Omega}}{d} = \frac{\sqrt{ERP} \cdot 7.014\sqrt{\Omega}}{d}} \quad 16)$$

13.4 Bestimmung der Empfangsspannung an einem 50Ω-System

$$U_{RX} = \sqrt{P_e \cdot 50\Omega} = \frac{E \cdot \lambda}{\pi} \cdot \sqrt{G_{eD}} \cdot \sqrt{\frac{1.64 \cdot 50}{8 \cdot 60}} = E \cdot \lambda \cdot \sqrt{G_{eD}} \cdot 0.1316$$

$$\boxed{U_{RX} = E \cdot \lambda \cdot \sqrt{G_{eD}} \cdot 0.1316}$$

oder mit $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1}}{f}$

$$\boxed{\frac{U_{RX}}{V} = \frac{E}{V/m} \cdot \frac{MHz}{f} \cdot \sqrt{G_{eD}} \cdot 39.48}$$

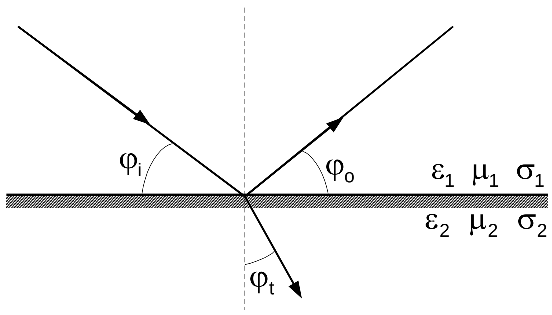
14 Terrestrische Ausbreitung

14.1 Die drei grundsätzlichen Ausbreitungsmechanismen

Reflexion – Diffraktion (Beugung) – Scattering (Streuung)

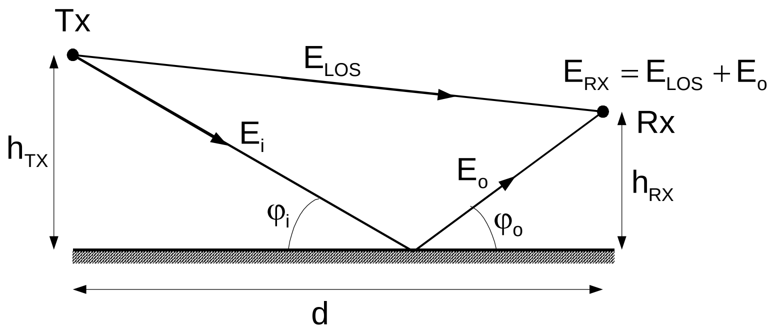
Für terrestrische Netze im Frequenzbereich von 30 MHz bis 1000 MHz wird eine Ausbreitung wirksam, die durch Beugung, Reflexion und Streuung geprägt ist. Durch diese Effekte ist eine Versorgung mit genügender Feldstärke vielfach auch gewährleistet, wenn der direkte Weg zwischen Sender und Empfänger durch die Topographie abgeschattet ist.

14.1.1 Reflexion



$$\varepsilon = \text{Permittivität}$$
$$\mu = \text{Permeabilität}$$
$$\sigma = \text{Leitwert}$$

Bodenreflexion:

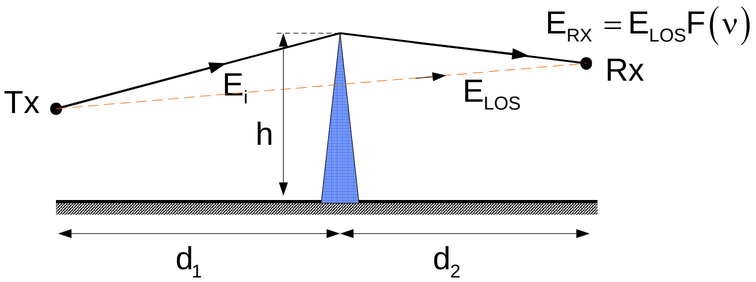


Approximation:

$$P_{Rx} \approx P_{Tx} G_{Tx} G_{Rx} \frac{h_{Tx}^2 h_{Rx}^2}{d^4}$$

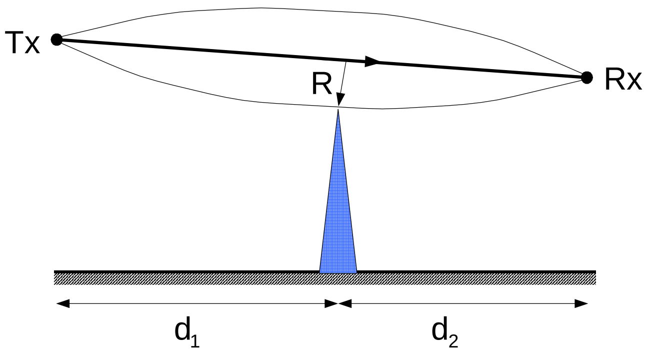
14.1.2 Diffraktion (Beugung)

Für die Diffraktion wird meistens ein Modell mit Beugung an einer scharfen Kante (Knife-Edge) verwendet.



$$E_{Rx} = E_{LOS}\frac{1+j}{2}\int_{\nu}^{\infty} e^{\frac{-j\pi t^2}{2}}\,dt \qquad \text{mit } \nu = h\sqrt{\frac{2(d_1+d_2)}{\lambda d_1 d_2}}$$

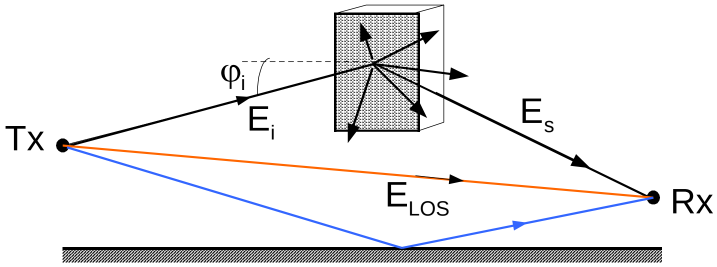
Für Line of Sight Verbindungen LOS (z.B. Mikrowellenlinks) sollte wenigstens die erste Fresnel-Zone frei von Hindernissen sein:



$$R = \sqrt{\frac{\lambda d_1 d_2}{d_1 + d_2}}$$

14.1.3 Streuung (Scattering)

Scattering erfolgt an rauen Oberflächen wie Gebäuden, Bäumen, Felsen, etc.



Der Scattering-Verlustfaktor kann approximiert werden mit

$$\rho_s \approx e^{-8\left(\frac{\pi\sigma\cos(\varphi_i)}{\lambda}\right)^2} J_o\left(8\left(\frac{\pi\sigma\cos(\varphi_i)}{\lambda}\right)^2\right)$$

$\sigma =$ Oberflächenrauhigkeit

$J_o =$ Bessel Funktion erster Art nullter Ordnung

$$E_s = E_i \rho_s$$

14.2 Freiraum (Free-Space)

Für die Freiraumausbreitung kann nach Gleichung 14) die Feldstärke am Empfangsort bestimmt werden mit

$$E = \sqrt{\frac{P_s G_s 30\Omega}{d^2}}$$

oder der Feldstärkepegel F_o in dBu/m

$$F_o/(\mathrm{dBu/m}) = 10\log\frac{P_s}{W} + 10\log G_s - 20\log\frac{d}{km} + 74.8$$

14.3 Ebene Erde

Unter Berücksichtigung der Beugung und Reflexion auf der **ebenen Erde** findet man die Approximation

$$F_E/(\mathrm{dBu/m}) = \begin{vmatrix} F_o & A_E < 0 \\ F_o - A_E & A_E > 0 \end{vmatrix}$$

mit

$$A_E/\mathrm{dB} = 20\log\frac{d}{km} - 20\log\frac{f}{MHz} - 20\log\frac{h_s}{m} - 20\log\frac{h_E}{m} + 87.6$$

$h_s =$ Höhe der Sendeantenne

$h_E =$ Höhe der Empfangsantenne

oder als Streckendämpfung ausgedrückt:

$$a_E/\mathrm{dB} = \begin{vmatrix} a_{FSL}/\mathrm{dB} & A_E < 0 \\ a_{FSL}/\mathrm{dB} + A_E/\mathrm{dB} & A_E > 0 \end{vmatrix}$$

Aus Messungen in verschiedenen Geländen, Topographien und Überbauungen wurden Modelle und empirische Formeln für die Berechnung der Ausbreitungsdämpfungen entwickelt. Einige Methoden haben sich als Standard etabliert und sind zum Teil sogar durch CCIR normiert.

14.4 Das Hata-Modell

(M. Hata; Empirical formula for propagation loss in land mobile radio services, IEEE VT-29, 1980, S317-325)

Das Hata-Modell basiert auf Messungen in verschiedenen Geländen und das empirisch entwickelte Modell benützt die Mehrpfadausbreitung als Grundlage. Es ist durch CCIR normiert.

Geltungsbereich:

$$
\begin{aligned}
&100\ \mathrm{MHz} < f < 1500\ \mathrm{MHz} \\
&1\ \mathrm{km} < d < 20\ \mathrm{km} \\
&30\ \mathrm{m} < h_s < 200\ \mathrm{m} \\
&1\ \mathrm{m} < h_E < 10\ \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

$$a_{CCIR}/\mathrm{dB} = 69.55 + 26.16\log\left(\frac{f}{\mathrm{MHz}}\right) - 13.82\log\left(\frac{h_s}{\mathrm{m}}\right) + \left[44.9 - 6.55\log\left(\frac{h_s}{\mathrm{m}}\right)\right]\log\left(\frac{d}{\mathrm{km}}\right) + a_x(h_E)$$

$$a_x(h_E) = \begin{cases} \left[0.7 - 1.1\log\left(\frac{f}{\mathrm{MHz}}\right)\right]\frac{h_E}{\mathrm{m}} + 1.56\log\left(\frac{f}{\mathrm{MHz}}\right) - 0.8 & \text{Mittlere Stadt} \\ 1.1\text{-}8.29\left[\log\left(1.54\frac{h_E}{\mathrm{m}}\right)\right]^2 & \text{Grosstadt, f<200 MHz} \\ 4.97 - 3.2\left[\log\left(11.75\frac{h_E}{\mathrm{m}}\right)\right]^2 & \text{Grosstadt, f>400 MHz} \end{cases}$$

Weitere Gelände:

$a_{CCIR} = a_{CCIR}$ mit $a_x(h_E)=0$

$$a_{suburb}/\mathrm{dB} = a_{CCIR} - 2\left(\log\frac{f/\mathrm{MHz}}{28}\right)^2 - 5.4 \qquad \text{Vorstadt}$$

$$a_{open}/\mathrm{dB} = a_{CCIR} - 4.78\left[\log\left(\frac{f}{\mathrm{MHz}}\right)\right]^2 + 18.33\log\left(\frac{f}{\mathrm{MHz}}\right) - 40.94 \qquad \text{Offenes Gelände}$$

14.5 Das London-Modell

Das London-Modell basiert auf experimentell erfassten Messwerten im Stadtgebiet von London. (Ibrahim + Parson)

Geltungsbereich:

$$150\ \text{MHz} < f < 1000\ \text{MHz}$$
$$d \le 10\ \text{km}$$
$$30\ \text{m} < h_s < 300\ \text{m}$$
$$0 < h_E < 3\ \text{m}$$

$$a_{Lon}/\text{dB} = -\left\{\begin{array}{l} -20\log\left(0.7\dfrac{h_s}{m}\right) - 8\log\left(\dfrac{h_E}{m}\right) + \dfrac{f/\text{MHz}}{40} + 26\log\left(\dfrac{f/\text{MHz}}{40}\right) \\ -86\log\left(\dfrac{f/\text{MHz}+100}{156}\right) + \left[40 + 14.15\log\left(\dfrac{f/\text{MHz}+100}{156}\right)\right]\cdot\log\left(10^3\dfrac{d}{km}\right) \\ +0.265K - 0.37H + 0.087U - 5.5 \end{array}\right\}$$

K = Überbauung durch Gebäude in % der Landfläche (typisch 3 bis 50)
H = Elevationsdifferenz zwischen Fixstation und Mobil in m (H=0, wenn Rx und Tx in einer Ebene)
U = Prozentualer Anteil der Gebäude mit mehr als 3 Stockwerken (typisch: Stadtzentrum 60 bis 100, ausserhalb Stadtzentrum 10 bis 40)

14.6 Über Horizont Ausbreitung

In flachem, offenem Gelände kann folgende Approximation verwendet werden:

$$a_{OH}/\text{dB} = 20\log\left(\frac{h_s h_E}{d^2 10^6}\right) + 10\log\left[\frac{1+\left(\dfrac{d}{6d_{hor}}\right)^7}{1+\left(\dfrac{d}{d_{hor}}\right)^3}\right] + \left[\frac{-d}{13+77\left(\dfrac{d_{hor}}{d}\right)} + \left\{22 + \frac{f}{2000}\log\left(\frac{100}{f}\right)\right\}\right]$$

$$d_{hor} = 3.571\sqrt{K}\left(\sqrt{h_s} + \sqrt{h_E}\right) \qquad K = \frac{4}{3}$$

$h_s, h_E =$ Antennenhöhen in m
$d =$ Distanz zwischen den Antennen in km
$f =$ Frequenz in MHz
$K =$ atmosphärischer Refraktionsfaktor